Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$F = \neg\left(A\left(f(x_2, x_2)\right) \wedge B(b)\right) \rightarrow \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei frei geb.

$FV(F) = \{x_1, x_2\}$ „freie Variablen"

$GV(F) = \{x_2\}$ „gebundene Variablen"

Relⁿ		Fkt		Konst
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

<u>Nebendiskussion</u>

$\{\emptyset, 1, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$

$\forall x.\ ((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(1))$

Sem 4.2

Korrektur: vorhin stand $\Phi(x) :\equiv \neg\exists y \ldots$
Die Negation war natürlich falsch.

(a) $\neg \exists x \, \exists y \; \mathit{GrößerAls}^{(2)}(x,y)$

alternativ: $\forall x \; \neg \exists y \; \mathit{GrößerAls}^{(2)}(x,y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$$\Phi(x) :\equiv \exists y \left(\mathit{Teilt}^{(2)}(y,x) \wedge \mathit{GrößerAls}^{(2)}(\mathit{MinusDrei}^{(1)}(x), y) \right)$$

Zusatz: Die entsprechende Menge ist

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_{[x \mapsto n]} \models \Phi(x) \},$$

wobei $(\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{I}})$ „die Standardinterpretation" für die Symbole

$\{ \mathit{Teilt}^{(2)}, \mathit{GrößerAls}^{(2)}, \mathit{MinusDrei}^{(1)} \}$

bezeichnet.

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: R /2

Literatur: $\underbrace{\#}(R) = 2$ (od. andere Fktsymbol statt $\#$)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c),x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$: (u,v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

② $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c),x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1,1000), 1)$
  $= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,
  sodass $I \models R(f(x,c),x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1,1000), 1)$
  $= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,
  sodass $J \not\models R(f(x,c),x)$

(b) $\mathcal{U}$ = Menge aller Farben = { Rot, Blau, ... }

R^K = { (Rot, Rot), (Blau, Blau), ... }

f (Farbe$_1$, Farbe$_2$) = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

x^K = Lila.

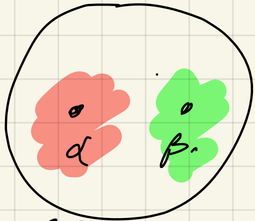
Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c),x)$.

Sem 4.4

(a) keine Tautologie

Betrachte die Formeln $F = R(x)$
$G = S(x)$



Betracht Universum + Interp.:
$\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$, $R^I = \{\alpha\}$, $S^I = \{\beta\}$.

Dann für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt $x^{I_{[x\mapsto u]}} = u \in R^I = R^{I_{[x\mapsto u]}}$
od. $\in S^I = S^{I_{[x\mapsto u]}}$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x\mapsto u]} \models R(x)$ od. $I_{[x\mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x\mapsto u]} \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow$ $I \models \forall x\,(F \vee G)$ ✱

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{I_{[x\mapsto u]}} = u \notin S^I = S^{I_{[x\mapsto u]}}$
Also $I_{[x\mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $I_{[x\mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ $I \not\models \underbrace{\forall x\; S(x)}_{\forall x\; G}$ ✱✱

Analog lässt sich argumentieren: $I \not\models \forall x\; F$ ✱✱✱

Aus ✱✱ + ✱✱✱ erhält man
$I \not\models \forall x\, F \vee \forall x\, G$ ✱✱✱✱

Aus ✱ + ✱✱✱✱ folgt also $I \not\models \forall x\,(F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\, F \vee \forall x\, G)$.

Insbesondere ist $\forall x\,(F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\, F \vee \forall x\, G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\, (F \to G)$$

$$\equiv \forall x\, (\neg F \lor G).$$

$$\equiv (\forall x\, \neg F) \lor G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$

$$\equiv (\neg \exists x\, F) \lor G$$

$$\equiv \exists x\, F \to G.$$

Also ist $\forall x\, (F \to G) \leftrightarrow (\exists x\, F \to G)$ eine Taut.

(c) Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $\quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$I \models \forall x\, \exists y\, P(x,y)$ aber $I \not\models \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Darum $I \not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$.

Also ist $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(X, I, J)$:⟺ I, J Interp. (über $\mathcal{U}$) mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(X)$.

X: Fml od. Term

$\Phi(F)$:⟺ Für alle Interp I, J: falls $\Psi(F, I, J)$, dann $I \models F$ gdw. $J \models F$. (F: Fml)

$\Phi(t)$:⟺ Für alle Interp I, J: falls $\Psi(t, I, J)$, dann $t^I = t^J$. (t: Term)

Behauptung. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $\Phi(F)$. } Dies entspricht der Aufgabe. (Warum?)

Beweis. Wir zeigen per str. Ind., dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.
Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).
[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

(In (2)–(6) wird vorausgesetzt, dass alle Teilformeln von F in $\mathcal{E}$ liegen.)

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.
Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = \neg G$, haben wir $Sym(F) = Sym(G)$.
Daraus erhalten wir

$$s \in Sym(G) \Longrightarrow s \in Sym(F) \xrightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J.$$

D.h. $\Psi(G, I, J)$ gilt. Per Ind., da $\Phi(G)$ gilt, erhalten wir
(*) $I \models G \iff J \models G$.

Dann

$$I \models F \iff I \models \neg G \iff I \not\models G$$

Def. von $\models$ für $\neg$

$$\overset{(*)}{\Updownarrow}$$

$$J \not\models G \iff J \models \neg G \iff J \models F.$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

→

(3) $F = G_1 \wedge G_2$ mit $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = G_1 \wedge G_2$, haben wir $Sym(F) = Sym(G_1) \cup Sym(G_2)$.
Daraus erhalten wir:

$$s \in Sym(G_1) \implies s \in Sym(F) \xRightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J$$

$$s \in Sym(G_2) \implies s \in Sym(F) \xRightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J$$

D.h. $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$ gelten.
Per Ind., da $\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten,
erhalten wir:

(*) $I \models G_1 \iff J \models G_1$ und $I \models G_2 \iff J \models G_2$.

Dann

$$\begin{aligned}
& I \models F \\
\iff\ & I \models G_1 \wedge G_2 \\
\iff\ & \underbrace{I \models G_1}_{} \text{ und } \underbrace{I \models G_2}_{} \\
& \quad \Updownarrow (*) \qquad\qquad \Updownarrow (*) \\
\iff\ & \overbrace{J \models G_1}^{} \text{ und } \overbrace{J \models G_2}^{} \\
\iff\ & J \models G_1 \wedge G_2 \\
\iff\ & J \models F
\end{aligned}$$

Def$^{\underline{n}}$ von $\models$ für $\wedge$

Def$^{\underline{n}}$ von $\models$ für $\wedge$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$ **[⤳ Übung!]** ... also $F \in \mathcal{E}$.

⟶

(5) $F = \exists x\, G$, wobei x eine Var ein $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = \exists x\, G$, haben wir $Sym(F) = Sym(G) \setminus \{x\}$.

(*) Daraus folgt $Sym(G) \subseteq Sym(F) \cup \{x\}$. (warum?)

Für $u \in \mathcal{U}$ gelten:

(Δ)

$$s \in Sym(F) \Rightarrow s \neq x, \text{ also } \underbrace{s^{I[x\mapsto u]} = s^{I}}_{\text{weil } s \neq x} \overset{\text{weil } \Psi(F,I,J)}{=} \underbrace{s^{J} = s^{J[x\mapsto u]}}_{\text{weil } s \neq x}$$

$$s = x \Rightarrow s^{I[x\mapsto u]} = u = s^{J[x\mapsto u]}.$$

Da $Sym(G) \overset{(*)}{\subseteq} Sym(F) \cup \{x\}$, folgt aus (Δ) dass

$\Psi(G, I_{[x\mapsto u]}, J_{[x\mapsto u]})$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Per Ind., da $\Phi(G)$ gilt, erhalten wir daraus, dass

(**) $I_{[x\mapsto u]} \models G \iff J_{[x\mapsto u]} \models G$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Dann

$I \models F$

Def$^{\models}$ von $\models$ für $\exists$

$\iff I \models \exists x\, G$

$\iff$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $I_{[x\mapsto u]} \models G$

$\Updownarrow$ (**)

Def$^{\models}$ von $\models$ für $\exists$

$\iff$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $J_{[x\mapsto u]} \models G$

$\iff J \models \exists x\, G$

$\iff J \models F$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$ [⤳ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

→

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1)-(6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen, $(U, \cdot^I)$, $(U, \cdot^J)$,

falls $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$, $\quad \Phi(F)$

dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.

$\square$

(Beweisende)

Dies ist nur eine Vorlage. Die wesentliche Arbeit bleibt zu lösen.

Hinweis₁ zu HA 4.5(a)

Beh. Seien $(U, \cdot^I)$, $(U, \cdot^J)$ Interpretationen und $F \in \mathcal{F}$ eine Fml. Angenommen, $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$.
Dann für alle Terme $t \in T$ mit $Sym(t) \subseteq Sym(F)$ gilt $t^I = t^J$.

Bew. Sei $T(t) := \{\tilde{t} \in T \mid \tilde{t}$ in t enthalten od. $\tilde{t} = t\}$.
Wir zeigen per str. Ind. über die Teilausdruckbeziehung, dass

$$\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$$

für alle $\tilde{t} \in T(t)$.

Sei $\tilde{t} \in T(t)$ beliebig. Angenommen $\underbrace{\tilde{t}'^I = \tilde{t}'^J \text{ für alle Teilausdrücke von } t.}_{\text{Dies ist die IV}}$

Fall 1 $\quad \tilde{t} = x$, x eine Variable.

Frage: Ist $x \in Sym(F)$?
Wie zeigt man dies?
Wie nütze man die Eigenschaften von I, J aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$?

Fall 2 $\quad \tilde{t} = c$, c eine Konstante

Hinweis: wie beim 1. Fall.

Fall 3 $\quad \tilde{t} = f(\tilde{t}_1', \tilde{t}_2', \ldots, \tilde{t}_n')$ mit f Fktsymbol (n-stellig) und $\tilde{t}_1', \tilde{t}_2', \ldots, \tilde{t}_n' \in T$.

Frage: Was kann man über $\tilde{t}_i'^I$ und $\tilde{t}_i'^J$?
Wie begründet man das?

Frage: Ist $f \in Sym(F)$? Wie zeigt man dies?
Wie nützt man die Eigenschaften von I, J aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$?

Per str. Ind. gilt $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$ für alle $\tilde{t} \in T(t)$.
Insbesondere gilt dies für t. Darum gilt die Behauptung. $\square$

(Variante, die zu Seiten 6–9 aus diesem Dokument passen.)

Hinweis zu HA 4.5(a)

Beh. Für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ gilt $\Phi(t)$.

Dies entspricht der Aussage in 4.5(a). (Warum?)

Bew. Sei $\mathcal{E} := \{ t \in \mathcal{T} \mid \Phi(t) \}$. Wir zeigen per str. Ind, dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.

Sei $t \in \mathcal{T}$.

(1) t eine Variable od. Konstante.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.
D. h.
$$s^I = s^J \quad \text{für alle } s \in Sym(t).$$

Anhand dieser Infos zeige jetzt, dass $t^I = t^J$

Hinweis: wie sieht $Sym(t)$ aus?

Darum gilt $\Phi(t)$. Also $t \in \mathcal{E}$.

(für den nichtatomaren Fall wird angenommen, alle Teilausdrücke liegen in $\mathcal{E}$)

(2) $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, wobei $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, f n-stellige Fktsymbol, $n \in \mathbb{N}_+$.

Per Annahme: $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{E}$.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.
D. h.
$$s^I = s^J \quad \text{für alle } s \in Sym(t).$$

Da $\boxed{?}$, gilt $\Psi(t_i, I, J)$ für alle i.

(*) Per Ind gilt also $\boxed{?}$ für alle i.

(**) Da $f \in Sym(t)$, gilt auch $\boxed{?}$.

Aus (*) + (**) folgt
$$t^I = (f(t_1, \dots, t_n))^I = \boxed{? = ? = ?} = t^J.$$

Darum gilt $\Phi(t)$. Also $t \in \mathcal{E}$.

Aus (1)+(2) folgt per str. Ind $\mathcal{E} = \mathcal{T}$ $\square$