

Seminaraufgaben Ser 5

30. Juni 2021
(Woche 12)

Sem 5. 1

$$\begin{aligned} (a) \quad & g(j(x, x), y, x) \quad [x \mapsto h(z)] \\ &= g(j(x, x) \quad [x \mapsto h(z)], y \quad [\dots], x \quad [\dots]) \\ &= g(j(\underbrace{x \quad [\dots]}_{\downarrow}, \underbrace{x \quad [\dots]}_{\downarrow}), y \quad [\dots], x \quad [\dots]) \\ &= g(j(h(z), h(z)), y, h(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & (\forall z P(z) \wedge \forall x \exists y R(x, y, z)) \quad [z \mapsto k(x, c_1)] \\ &= \forall z P(z) \quad [z \mapsto \dots] \wedge \forall x \exists y R(x, y, z) \quad [z \mapsto k(x, c_1)] \\ &= \forall z P(z) \quad \wedge \forall x_1 \exists y R(x_1, y, z) \quad [\dots] \\ &= \forall x_1 (\exists y R(x_1, y, z) \quad [\dots]) \\ &= \forall x_1 \exists y (R(x_1, y, z) \quad [\dots]) \\ &= \forall x_1 \exists y R(x_1, y, k(x, c_1)) \\ &= \forall z P(z) \wedge \forall x_1 \exists y R(x_1, y, k(x, c_1)) \end{aligned}$$

Sem 5.2

$$F = P(f(x, z))$$

Anmerkungen

P 1-stellig
 f 2-stellig
 $y \notin FV(F)$

Reln
Fkt.

Sei (U, \cdot^I) fixe Interp.

Z: $I \models \forall y (F[x \mapsto y])$ gdw. $I \models \forall x F$

$$I \models \forall y (F[x \mapsto y])$$

gdw. $I \models \forall y P(f(y, z))$

gdw. für alle $u \in U$: $I[y \mapsto u] \models P(f(y, z))$

gdw. für alle $u \in U$: $(f(y, z))^{I[y \mapsto u]} \in P^{I[y \mapsto u]}$

gdw. für alle $u \in U$: $f^{I[y \mapsto u]}(y^{I[y \mapsto u]}, z^{I[y \mapsto u]}) \in P^{I[y \mapsto u]}$

weil f, z, P von $I[y \mapsto u]$ und I gleich interpretiert werden.

gdw. für alle $u \in U$: $f^I(u, z^I) \in P^I$

gdw. für alle $u \in U$: $(f(x, z))^{I[x \mapsto u]} \in P^{I[x \mapsto u]}$

gdw. für alle $u \in U$: $I[x \mapsto u] \models P(f(x, z))$

gdw. $I \models \forall x P(f(x, z))$

gdw. $I \models \forall x F$ **Also gilt die Aussage.**

NEBENRECHNUNG

$$F[x, y] = P(f(x, z)) [x \mapsto y] \\ = P(f(y, z))$$

Kritischer Übergang

analog zu (1)

Sem 5.3

$$F = \neg \exists x_0 \exists x_1 \left(\forall z P(f(x_0, x_1, z)) \wedge \forall x_0 (Q(y) \rightarrow T(x_0)) \right)$$

(a) NNF erstellen

(\neg reinschreiben, $\forall \leftrightarrow \neg \exists$, $\exists \leftrightarrow \neg \forall$)

$$F \equiv \forall x_0 \forall x_1 \neg (\dots \wedge \dots)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 (\neg \forall z \dots \vee \neg \forall x_0 \dots)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \left(\exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_0 \neg (\dots \rightarrow \dots) \right)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \left(\exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_0 (Q(y) \wedge \neg T(x_0)) \right) \quad \text{NNF}$$

(b) Bereinigung

$$F \equiv \forall x_0 \forall x_1 \left(\exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

ist bereinigt.

Binden:

$$F \text{ erf. äqv zu } \exists y \forall x_0 \forall x_1 \left(\exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

$$(c) \quad F_2 = \exists y \forall x_0 \forall x_1 \left(\exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

$$\equiv \exists y \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \left(\neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

PNF

$$(d) \quad F_2 = \exists y \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \left(\neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

erf. äquivalent zu

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \left(\neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(c') \wedge \neg T(x_2)) \right)$$

c' neue Konst.

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \left(\neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0, x_1))) \vee (Q(c') \wedge \neg T(g''(x_0, x_1))) \right)$$

g', g'' neue Fkt. symbol.

Skolemisierung von F_2

(=: F_3)

(e) F erf. äqv. zu F_3

$$F_3 = \forall x_0 \forall x_1 ($$

$$\neg (P(f(x_0, x_1, g'(x_0, x_1))) \vee (Q(c') \wedge \neg T(g''(x_0, x_1))))$$

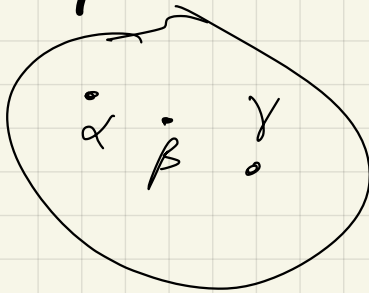
$$\equiv (\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$
$$\equiv (\neg A_0 \vee A_1) \vee (\neg A_0 \vee \neg A_2)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 ($$
$$(\neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0, x_1)))) \vee Q(c')$$
$$\wedge ((\neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0, x_1)))) \vee \neg T(g''(x_0, x_1)))$$
$$\Big)$$

~~KNF.~~

Sem 5.4

(a) $U =$



$$E^I = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$$

$$g^I : U \longrightarrow U$$

$$: \alpha \mapsto \beta$$

$$: \beta \mapsto \gamma$$

$$: \gamma \mapsto \alpha$$

(b) Sei $u \in U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Fall 1. $u = \alpha$.

Sei $v = g^I(u) = \beta$.

Dann $(u, v) \in E^I$ und $(v, u) \notin E^I$

Also $I_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also für ein $v \in U$ gilt

$I_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also $I_{[x \mapsto u]} \models \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Fall 2. $u = \beta$.

Sei $v = g^I(u) = \gamma$

Dann $(u, v) \in E^I$ und $(v, u) \notin E^I$

Also $I_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also für ein $v \in U$ gilt

$I_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also $I_{[x \mapsto u]} \models \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Fall 3. $u = \gamma$. Analog zu Fall 2.

$I_{[x \mapsto u]} \models \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Also für alle $u \in U$: $I_{[x \mapsto u]} \models \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$
 $\Rightarrow I \models \forall x \exists y (\dots)$ d.h. $I \models F$

(c) **Ja.** Die Interpretation der Skolemfunktion liefert uns Zeugen für die \exists -quantifizierte Teilform.
(Siehe Bearbeitung von (b).)

(d) **Nein.** Man kann die Interpretation der Skolemfunktion so wählen, dass die Werte auf „Nichtzeugen“ von \exists -quantifizierten Teilform abgebildet werden.

Z.B. wenn man oben $g'(\alpha) = \alpha$ o.d.

$g'(\beta) = \gamma$ und $g'(\gamma) = \beta$ wählt,

gilt $I \models F$ weiterhin, aber $I \not\models F^{\text{skol}}$.

Bem. I. A. wissen wir nur, dass F, F^{skol}

erf. äqv. sind, aber wir müssen dennoch

im Einzelfall prüfen, ob $F \not\models F^{\text{skol}}$ wirklich

so ist.