Seminaraufgaben Ser 6

14. Juli 2021 (Woche 14)

Sem 6.1

a) $F = \forall x\,(R(c_{17}, f(x)) \wedge \neg R(x, c_4))$

Fraktur c

$H := \{\mathfrak{c}\} \,\dot\cup\, (Sym(F) \cap S)$

$= \{c\} \cup \{c_4, c_{17}, f\}$

$= \{c, c_4, c_{17}, f\}$

$H(F) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots$
$c_4, f(c_4), f(f(c_4)), \ldots$
$c_{17}, f(c_{17}), f(f(c_{17})), \ldots \}$

b) $H = \{c, j, f\}$

Herbrand-Konst.

$H(G) = \{ c, j(c,c), j(c, j(c,c)),$
$j(j(c,c),c), j(j(c,c), j(c,c)),$
$f(c), j(c, f(c)), j(f(c), c),$
$j(j(c,c), f(c)), j(f(c), j(c,c)),$
$j(f(c), f(c)), j(j(c,c), j(c,c)),$
$f(j(c,c)), f(f(c)), \ldots \}$

c) $H(G) = \{c, f, j\}$, I eine Herb-Int.

Term t	t^I
x	c
z	c
$j(x,z)$	$j(c,c)$
$f(j(x,z))$	$f(j(c,c))$
$f(k(x))$	$f(c)$
$k(f(\ldots))$	c

d) Die Herbrand-Exp ist

$$E(G) = \{ Q(j(c,c)) \wedge \neg Q(j(c, f(c))),\\ Q(j(f(c), f(c))) \wedge \neg Q(j(f(c), f(c))),\\ \ldots \}$$

Nun ist die Teilmenge

$$\{Q(j(f(c),f(c))) \wedge \neg Q(j(f(c),f(c)))\} \subseteq E(G)$$

unerfüllbar.

(Darum ist $E(G)$ unerfüllbar.)

Laut §96 Kor. ist also G unerf. $\square$

Sem 6.2

Beachte

abz. $\equiv$ endl. od. abz. ∞

Kardinalzahlen

$0\ 1\ 2 \dots \aleph_0$ $\quad \aleph_1\ \aleph_2 \dots$

$\underbrace{0\ 1\ 2 \dots \aleph_0}_{\text{abzählbar}}$ $\quad \underbrace{\aleph_1\ \aleph_2 \dots}_{\text{überabzählbar}}$

a) **Falsch :**

Zwar ist $H(F)$ laut [§92 Thm, VL_{11}] abzählbar,
aber …

… falls $Sym(F) \cap S$ nur aus Konstanten besteht,
z.B. $F = \forall x (R(c_4, x) \wedge \neg P(x))$

dann $H(F) = H = \{c\} \cup (Sym(F) \cap S)$,
was endlich ist.

$\Rightarrow$ Nicht für jedes F ist $H(F)$ unendlich.

b) **Falsch.** Angenommen, es gebe
$F_{\aleph_0} \in \mathcal{F}$, so dass für alle Modelle $(\mathcal{U}, \cdot^I)$
$I \models F_{\aleph_0} \Leftrightarrow \mathcal{U}$ abzählbar $\quad$ *

Nehmen wir ein bel. überabzählbares Modell,
$(\mathcal{U}, \cdot^I)$, z.B. $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

Wegen Überabzählbarkeit und * gilt

$$I \models \neg F_{\aleph_0}.$$

$\Rightarrow \neg F_{\aleph_0}$ erf.

$\Rightarrow \neg F_{\aleph_0}$ durch ein abzählbares Modell $(\mathcal{U}_\Delta, \cdot^{I_\Delta})$ erf.,
d.h. $I_\Delta \models \neg F_{\aleph_0}$

$\overset{*}{\Rightarrow} \quad \mathcal{U}_\Delta$ überabzählbar. $\qquad$ Widerspruch!

Darum stimmt die Annahme oben nicht $\qquad \square$

Sem 6.3

$$F = B(x, g(y)) \wedge \exists y\, R(y, g(x))$$

a) $F[y \mapsto g(a)]$

$$= B(x, g(g(a))) \wedge \exists y\, R(y, g(x))$$

$F[y \mapsto g(a)][x \mapsto y]$

$$= B(y, g(g(a))) \wedge \left(\exists y_0\, R(y_0, g(y))\right)[\ldots]$$

$$= B(y, g(g(a))) \wedge \exists y_0\, R(y_0, g(y))$$

$\neq$ i.A. $F[x \mapsto g(a)]$

b) $F[x \mapsto z][z \mapsto g(a)]$

$$= B(z, g(y)) \wedge \exists y\, R(y, g(z))$$

$$= B(g(a), g(y)) \wedge \exists y\, R(y, g(g(a)))$$

c) $F[x \mapsto z, \quad z \mapsto g(a)] \neq F[x \mapsto g(a)]$

$$= B(z, g(y)) \wedge \exists y\, R(y, g(z))$$

solange $x \in FV(F)$

d) $F[y \mapsto g(a)][g(a) \mapsto y]$

muss eine Var sein!!

X

Sem 6.4

a) $L_1 = \neg P(x, a, g(b))$ $\quad L_2 = \neg P(y, y, g(b))$

$\theta_0 = $ (leer Subst)

i	$L_1\theta_i$	$L_2\theta_i$	Unterschied?	Var?	kein Vork?	θ_{i+1}
0	$\neg P(x, a, g(b))$	$\neg P(y, y, g(b))$	✓ x/y	✓ x	✓	$\theta_1 = \theta_0\,[x \mapsto y] = [x \mapsto y]$
1	$\neg P(y, a, g(b))$	$\neg P(y, y, g(b))$	✓ a/y	✓ y	✓	$\theta_2 = \theta_1\,[y \mapsto a]$
2	$\neg P(a, a, g(b))$	$\neg P(a, a, g(b))$	✗			
3	——— terminiert ———					

$\Rightarrow$ L_1, L_2 unifizierbar; Unifikation ist $\neg P(a, a, g(b))$;

der minimale Unifikator ist $\theta_{min} = \theta_2 = \underbrace{[x \mapsto y][y \mapsto a]}_{\neq [x \mapsto a] \text{ i. A.}}$

b) $L_3 := P(g(x), z)$ $\quad$ $L_4 := P(g(y), g(z))$

$\theta_0 = $ (leer Subst)

i	$L_3\theta_i$	$L_4\theta_i$	Unterschied?	Var?	kein Vork?	θ_{i+1}
0	$P(g(x), z)$	$P(g(y), g(z))$	✓ x / y	✓ x	✓	$\theta_1 = [x \mapsto y]$
1	$P(g(y), z)$	$P(g(y), g(z))$	✓ $z / g(z)$	✓ z	✗	
2		— Abbruch —				

$\Rightarrow L_3, L_4$ <u>nicht</u> unifizierbar, da z in $g(z)$ vorkommt.

c) $L_5 = P(g(x), y)$ $\qquad L_6 = P(y, h(x))$.

$\theta_0 =$ (leer Subst)

i	$L_5 \theta_i$	$L_6 \theta_i$	Unterschied?	Var?	kein Vork?	θ_{i+1}
0	$P(g(x), y)$	$P(y, h(x))$	✓ $g(x)/y$	✓ y	✓	$\theta_1 = [y \mapsto g(x)]$
1	$P(g(x), g(x))$	$P(g(x), h(x))$	✓ $g(x)/h(x)$	✗		
2	Abbruch					

$\Rightarrow L_5, L_6$ nicht unifizierbar; Abbruchkrit: weder $g(x)$ noch $h(x)$ Variablen.