

8. Dezember 2022



✓ Orga

✓ HA 8

✓ Sem 9 + Konzepte

Was Vektoren nicht sind
Was ~~Vektoren~~ Vektorräume sind

Eigenschaften von Mergen von Vektoren

Was... ist
der Vektorraum?



Konzepte / Stoff

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\rangle, \quad \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ -3 & \sqrt{\pi} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

das ist nicht was Vektoren/Operatoren sind
... sondern lediglich praktische Darstellungen.

① Primäres Konzept: Vektorräume



beliebige Mengen V mit Struktur

- $(V, +, 0)$ eine Gruppe Addition
- $\mathbb{K} \curvearrowright V$ Skalarmult.
"wirkt auf"

② Vektoren sind lediglich die Gegenstände solche Räume

③ Zweck Berechnungen benutzen wir Spalten/Zeilen/Raster — aber unnötig!

Beispiele

2

VR Körper

Vektoraddition / Skalarmultiplikation

\mathbb{K}^n \mathbb{K}

$$(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)_i \quad \alpha (x_i)_i := (\alpha x_i)_i$$

$\mathbb{K}[x]$ \mathbb{K}

Polynome

$$\sum_{k=0}^m a_k x^k + \sum_{k=0}^n b_k x^k := \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k) x^k$$

$$\alpha \sum_{k=0}^n c_k x^k := \sum_{k=0}^n \alpha c_k x^k$$

setze = 0 für $k > m$
setze = 0 für $k > n$

$C(\bar{X})$

stetige Fkt

$\ell^p(\mathbb{N})$

Folgen mit $\sum_n |x_n|^p < \infty$

$L^p(\mathbb{R}^d)$

Fkt mit $\int |f(x)|^p dx < \infty$

"punktweise"
Operationen

sehr nützlich in der Physik!

Grundbegriffe

3

Sei V ein VR über K . Sei $U \subseteq V$, $B \subseteq V$

z.B. $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
aber nicht endlich sein!

B heißt linear unabh. gdw. $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ versch.
 $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$
 $\sum_i c_i x_i = 0 \Rightarrow$ alle $c_i = 0$
 \rightarrow alle $c_i = 0 \Rightarrow \sum_i c_i x_i \neq 0$

Erzeugendensys. gdw. $\forall x \in V : \exists u_1, u_2, \dots, u_n \in B$
 $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$

Basis gdw. l.u. + E.S. s.d.
 $x = \sum_{i=1}^n c_i u_i$

U heißt UVR gdw. U unter + und Skalarmult
abgeschl. und $0 \in U$.

Konstruktionen / Größen

Sei V VR. über K

$\dim(V) := |B|$ wobei $B \subseteq V$ eine Basis.

↳ auf erstem Blick sieht dies nicht wohldefiniert aus
... auf dies stellt sich als unabh. von B und damit
doch als wohldefiniert heraus!

- Für unendlichen Fall ist der Beweis sehr einfach (↳ Schubfachprinzip)
- Für endlichen Fall brauchen wir Gauß-Verfahren!
(kniffliger!)

Konstruktionen / Größen

5

Seien V VR über \mathbb{K}

$S \subseteq V$ beliebig definieren wir

$\text{lin}(S) := \{ \text{alle } \underline{\text{endl.}} \text{ lin Komb aus Vekt. in } S \}$

$$= \left\{ \sum_{e \in F} c_e e \mid F \subseteq S \text{ endl.}, (c_e)_{e \in F} \subseteq \mathbb{K} \right\}$$

Sem 9

Seminaraufgabe 9.1

Bilden die Mengen mit der üblichen Addition und Multiplikation auf \mathbb{C}^3 einen \mathbb{C} -Vektorraum?

a) $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y = 1 \right\}$

b) $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y = z \right\}$

Anmerkung: \mathbb{C}^3 bildet bekanntermaßen unter den kanonischen ko-ordinatenweisen Operationen einen VR über \mathbb{C} (siehe VL)

Darum gilt für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}^3$ versehen mit denselben Operation:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} X \text{ VR über } \mathbb{C} \iff X \text{ UVR von } \mathbb{C}^3 \\ \iff 0 \in X \text{ und } X \text{ unter } + \text{ und Skalarmult. stabil} \\ \iff 0 \in X \text{ und } \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}: \alpha x + y \in X. \end{array} \right.$$

a) W ist kein VR über \mathbb{C} , da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \quad \text{aber} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

[da $1+0=1$] [da $2+0 \neq 1$]

b) Beh. U bildet einen VR über \mathbb{C} :

Beweis:

Für $u, v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot u + v)_1 + (\alpha \cdot u + v)_2 &= (\alpha \cdot u_1 + v_1) + (\alpha \cdot u_2 + v_2) \\ &= \alpha \cdot (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ &\stackrel{(+)}{=} \alpha \cdot u_3 + v_3 \\ &= (\alpha \cdot u + v)_3 \end{aligned}$$

\Rightarrow per Def 1 ist also $\alpha \cdot u + v \in U$

• Also $\forall u, v \in U, \alpha \in \mathbb{C}: \alpha u + v \in U$

• \Rightarrow laut (*) bildet also U einen VR über \mathbb{C} .

d.h.

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + u_2 = u_3 \\ v_1 + v_2 = v_3 \end{array} \right\} (+)$$

Seminaraufgabe 9.2

Sei $\text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge der Abbildungen, versehen mit der Addition $(p+q)(x) := p(x) + q(x)$ und der Multiplikation mit Skalaren $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$ für $x \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|^2$ für $x \in \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = |x|^4$ für $x \in \mathbb{C}$.

- Sind f und g linear unabhängig?
- Berechnen Sie die lineare Hülle von $\{f, g\}$, siehe auch Gleichung 1.
- Gibt es Eigenschaften, die alle Vektoren in $\text{lin}(\{f, g\})$ erfüllen?

Anmerkung $\text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ versehen mit den o.s. punktweise Operationen bildet einen VR.

a) Beh. f, g sind l.u.

Bew. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = 0$ $\textcircled{*}$
 $\text{Z: } \alpha, \beta = 0$

• Aus $\textcircled{*}$ erhält man

$$0 = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(1) = \alpha \cdot f(1) + \beta \cdot g(1) = \alpha + \beta$$

$$0 = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(\sqrt{2}) = 2\alpha + 4\beta = 2(\alpha + 2\beta)$$

\Rightarrow Lösung dieses LGS: $\alpha = \beta = 0$.

