MfP I, Woche 8, Seminar

1. Dezember 2022

- ☑ Orga — Lösungen

  Dieses Notebook: https://tinyurl.com/mfp1-woche8
  Git Repo(s): https://gitea.math.uni-leipzig.de/raj_mathe

- ☑ HA 7 ?

- ○ Stoff: ○ (abs Konvergenz vs. Divergenz) → $\frac{\circ}{\circ}$ - Krit, → $\sqrt[\circ]{\circ}$ - Krit

  ○ Q-K / W-K aussagekräftig gdw ... ?

  ○ $\forall^{*}$ „für fast alle"

  $\exists^{*}$ „es gibt ∞ viele, so dass"

- ☑ Sem 8

HA 7.x

Hausaufgabe 7.3
Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 0]$ eine monoton wachsende Nullfolge.

a) Zeigen Sie mithilfe des Cauchykriteriums, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(s_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $s_{n,m} = \sum_{k=n}^{n+m}(-1)^k x_k$ konvergiert.

b) Wir definieren die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $t_n = \lim_{m\to\infty} s_{n,m}$. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ansatz ohne C-K

Vorarbeit Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Reihe $\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x_{n+j}}$ (+)

$(m+1)$. partielle Summe: $\sum_{j=0}^{m} (-1)^j x_{n+j} = (-1)^n \sum_{k=n}^{m+n} (-1)^k x_k = (-1)^n s_{n,m}$ (*)

a) $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq (-\infty, 0]$ mon. Nullfolge

$\Rightarrow (x_{n+j})_{j=0}^{\infty} \subseteq (-\infty, 0]$ mon. Nullfolge

$\Rightarrow (|x_{n+j}|)_{j=0}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ mon. Nullfolge

$\overset{L-K}{\Rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x_{n+j}$ konv.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \left(\sum_{j=0}^{m} (-1)^j x_{n+j}\right)_{m=1}^{\infty}$ konv.

$\Rightarrow ((-1)^n s_{n,m})_m$ konv. $\Rightarrow (s_{n,m})_m$ konv. [da $(-1)^n$ bzgl. m konst]

Ansatz mit C-K

Sinn dahinter? um x_k mit x_{k+1} in „Kontakt" zu bringen!

NR 1: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$

$$\left|\sum_{k=a+1}^{b} (-1)^k x_k\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\sum_{k=a+1}^{b} (-1)^k x_k + \sum_{k=a}^{b-1} (-1)^{k+1} x_{k+1}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(\sum_{k=a}^{b}\left((-1)^k x_k + (-1)^{k+1} x_{k+1}\right) - (-1)^{b+1} x_{b+1} - (-1)^a x_a\right)\right|$$

Δ-Ungl.

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=a}^{b} |x_k - x_{k+1}| + |x_a| + |x_{b+1}|\right)$$

$(x_n)_n \subseteq (-\infty, 0]$, $\nearrow$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=a}^{b}\left(|x_k| - |x_{k+1}|\right) + |x_a| + |x_{b+1}|\right)$$

Teleskopsumme

$$= \frac{1}{2}\left(|x_a| - |x_{b+1}| + |x_a| + |x_{b+1}|\right)$$

$$= |x_a|$$

Also $\left|\sum_{k=a+1}^{b} (-1)^k x_k\right| \leq |x_a|$

NR₂: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 < m_2$. Dann

$$|S_{n,m_2} - S_{n,m_1}| = \left| \sum_{k=n}^{n+m_2} (-1)^k x_k - \sum_{k=n}^{n+m_1} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+m_1+1}^{n+m_2} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| (-1)^n \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-1)^k x_k \right| \overset{NR_1}{\leq} |x_{m_1}|$$

Falls $m_1 = m_2$, dann $|S_{n,m_2} - S_{n,m_1}| = 0 \leq |x_{m_1}|$ auch.

Darum $|S_{n,m_2} - S_{n,m_1}| \leq |x_{\min\{m_1,m_2\}}|$ im Allgemeinen.

Jetzt können wir a) beweisen:

a) Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $(x_k)_k$ eine Nullfolge ist, ex. $N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall k \geq N: \ |x_k| < \varepsilon \qquad **$$

Für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1, m_2 \geq N$ gilt

$$|s_{n,m_2} - s_{n,m_1}| \overset{NR_2}{\leq} |x_{\min\{m_1,m_2\}}| \overset{Mon}{\leq} |x_N| \overset{**}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m_1, m_2 \geq N: \ |s_{n,m_2} - s_{n,m_1}| < \varepsilon$$

d.h. $(s_{n,m})_m$ erfüllt das C-K.

b) Aus a) mit $n=1$ eingesetzt erhält man, dass

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_k\right)_{m=2}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{1+m} (-1)^k x_k\right)_{m=1}^{\infty} \text{ konv.}$$

$\Rightarrow$ (per DEFN von Reihen) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ konv.

$\Rightarrow$ Basiswissen über Tailsummen

$$\left(\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k x_k}_{=t_n}\right)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ $(t_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ //

Nebenrechnung

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} x_{n+k} \overset{\text{DEFN}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n+k} x_{n+k} = \lim_{m\to\infty} s_{n,m} =: t_n$$

Hintergrundsstoff

Begriffe (endl. / unendl. / koendl.)

$\forall^*$ „für fast alle"

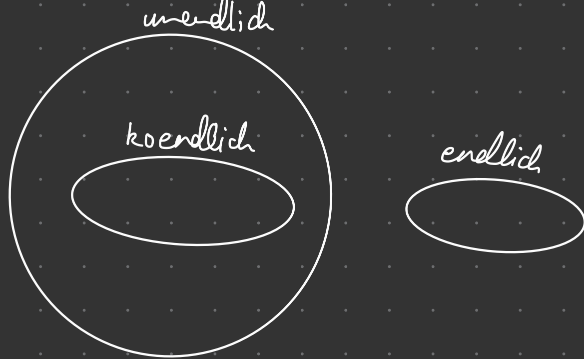
$\exists^*$ (auch $\exists^\infty$ ... verführerisch „für ∞ viele")

WK

QK

Vorab

- $A \subseteq X$ endl. gdw. $|A| \in \mathbb{N}_0$
- $A \subseteq X$ unendl. gdw. $|A| \notin \mathbb{N}_0$.
- $A \subseteq X$ koendl. gdw. $X \setminus A$ endl.



Bsp (Teilmengen von $\mathbb{N}$ od. $\mathbb{N}_0$)

$\{2, 3, 8, 1000007\}$ ist endlich.

$\emptyset$ ist endlich

$\mathbb{N}$ ist koendlich ($\Rightarrow$ unendlich)

$\mathbb{P}$ ist unendlich aber nicht koendlich

$\{5000, 5001, 5002, \ldots\}$ ist koendlich ($\Rightarrow$ unendlich)

Sei $\Phi(n)$ irgendeine Aussage (bspw. „$|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$").

- $\forall^* n \in \mathbb{N}_0 : \Phi(n)$ od. „für fast alle n gilt $\Phi(n)$"

  spielt keine Rolle!

  bedeutet: $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ ist **ko**endlich

  $\equiv$ $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\} = \mathbb{N} \setminus I$ für ein endl. $I \subseteq \mathbb{N}$

  $\equiv$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \Phi(n)$

- $\exists^* n \in \mathbb{N}_0 : \Phi(n)$ od. „für ∞ viele n gilt $\Phi(n)$"

  spielt keine Rolle!

  bedeutet: $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ ist **unendlich**

  $\equiv$ ex. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
  s.d. $\Phi(n_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_n x_n \quad \text{(abs) konv.? / div?}$$

schwächste Form $\longleftrightarrow$ stärkste Form

Varianten von W-K

(1) $\lim_n |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \limsup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1): \underbrace{\forall^* n \in \mathbb{N}_0}_{\text{„für fast alle"}}: |x_n|^{1/n} \leq q$

[lim ex. & < 1]

$\Rightarrow \sum_n x_n$ abs konv.

(2) $\lim_n |x_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow \limsup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow \underbrace{\exists^* n \in \mathbb{N}_0}_{\text{„ex. ∞ viele"}}: |x_n|^{1/n} \geq 1$

[lim ex. & > 1]

$\Rightarrow \sum_n x_n$ divergiert

$$\sum_n x_n \quad \text{(abs) konv.? / div?}$$

schwächste Form $\longleftrightarrow$ stärkste Form

Varianten von Q-K (Ann: $x_n \neq 0$ für alle n)

"für fast alle"

① $\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1): \forall^* n \in \mathbb{N}_0: \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq q$

[lim ex. & < 1]

$\Rightarrow \sum_n x_n$ abs konv.

② $\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \Rightarrow \cancel{\limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \not\Rightarrow} \forall^* n \in \mathbb{N}_0: \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$

[lim ex. & >1]

$\Rightarrow \sum_n x_n$ divergiert.

diese Impl. gilt, aber nützt uns nicht

diese Impl. gilt nicht

Fazit

- Die 3. Variante ist jeweils die am stärkste Variante
- Die 1. od. 2. Varianten sind zwar schwächer, aber dafür oft viel einfacher zu prüfen
- Oft ex. kein $\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ bzw. $\lim_n |x_n|^{1/n}$ aber $\limsup \ldots$ kann man **stets** berechnen
- **ACHTUNG!** Für Q-K bei Divergenz sagt $\limsup \ldots > 1$ **nichts** aus!
- <u>nicht</u> aussagekräftig wenn weder ① noch ② gilt

Sem 8.x

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^3}{z^{n^2}}$, wobei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$

Vorarbeit Sei $x_n :=$ n. Glied.

Dann

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)!^3 \, |z|^{n^2}}{n! \quad |z|^{(n+1)^2}} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \cdot \frac{1}{|z|^{(n+1)^2 - n^2}}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{|z|^{\underbrace{2n+1}_{=2(n+1)-1}}}$$

$$= |z| \cdot \frac{(n+1)^3}{|z|^{2(n+1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(weil $|z|>1$ und „Exp schlägt Poly")

Q-K anwenden:

Also $q := \limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq 0 < 1.$

Da $\boxed{q < 1}$, konv. nach Q-K die Reihe absolut.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right).$

Vorarbeit

Sei $x_n := \prod_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{}$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Dann

$$|x_n|^{1/n} = x_n^{1/n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)^{1/n}$$

$$\leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)^{1/n}$$

$$= \left(e^{-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)^{1/n}$$

$$= e^{-\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

⇝ leichte Induktionsaufgabe

$$= e^{-\overbrace{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)}^{\longrightarrow\ \frac{1}{3}\cdot(1-0)(1-0)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{3}}$$

W-K anwenden:

Also $q := \limsup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{3}} < 1.$

Da $\boxed{q < 1}$, konv. nach W-K die Reihe absolut.