MfP I, Woche 13, Seminar

19. Januar 2023

0

- ✓ Orga
- ✓ Lsg HA 12
- ✗ Eigenwertpr.
- ✓ Sem 13

$\mathrm{Bild}(A)$, $\mathrm{Kern}(A)$ [od. $\ker(A)$]

$\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(A))$

Eigenwerte: $\chi_A = \det(A - \lambda \cdot 1)$

[in Lit. $\det(\lambda \cdot 1 - A)$]

$= (-1)^n \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$

$\sum n_i = n$

Eigenräume $\{\bar{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\bar{x} = \lambda \bar{x}\}$

$= \mathrm{Kern}(\lambda \cdot \mathbb{1} - A)$ [wieso?]

es gilt

$1 \leq \dim(\mathrm{Kern}(\lambda_i \cdot \mathbb{1} - A)) \leq n_i$

wenn <, dann „entartet"

[redacted]

Hausaufgaben 12.x

(auf Tafel)

(Bitte das VL-Skript durchlesen!
Folgendes Material soll nur stichpunktartig
Konzepte erläutern/wiederholen.)

[redacted]

Stoff

(auf Tafel)

[redacted]

Seminaraufgaben 13.x

wird.

e) Sei $A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\langle v, w \rangle_A := v^T A w$. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ein Skalarprodukt definiert. Sind die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ auch orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$?

Axiome von Skalarprod. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$

1) Für $v, w \in \mathbb{C}^3$ gilt $\langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle^*$.

2) $\langle v, \cdot \rangle$ linear. $\Big\} \; \forall v \in \mathbb{C}^3$

$\langle \cdot, v \rangle$ konj. linear

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilinear

$1{,}5$

3) $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{C}^3$

4) " $= 0 \Rightarrow v = 0$

($\Leftarrow$ folgt aus 2)

1) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Z: $\langle w, v \rangle_A = \langle v, w \rangle_A$

$$\langle v, w \rangle_A = v^T A w$$

$$\langle w, v \rangle_A = w^T A v = \langle w, Av \rangle \leftarrow \text{Standard s.p.}$$

$$= \langle w \,|\, Av \rangle$$

$$= (A^T w)^T v$$

$$= (A w)^T v$$

$$= v^T (A w)$$

(weil alles $\mathbb{R}$-wertig) $\Longrightarrow A^T = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \langle v, w \rangle_A$$

$$= \langle v, w \rangle_A$$

2) Sei $v \in \mathbb{R}^3$.

Dann $\langle v, \cdot \rangle_A : w \longmapsto v^T A w$

$$\langle v, \lambda w_1 + w_2 \rangle = v^T A (\lambda w_1 + w_2)$$
$$= \lambda \cdot v^T A w_1 + v^T A w_2$$
$$= \lambda \langle v, w_1 \rangle_A + \langle v, w_2 \rangle_A.$$

für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3+4) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Dann

$$\langle v, v \rangle_A = v^T A v = \sum_{i=1}^{3} v_i (Av)_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_i A_{ij} v_j$$

$$\langle v, v \rangle_A = 5\, v_1 v_1 + 4\, v_1 v_2 + 4\, v_2 v_1 + 5\, v_2 v_2 + 1\, v_3 v_3$$

$$= 5 v_1^2 + 5 v_2^2 + 8 v_1 v_2 + v_3^2$$

$$= 5 v_1^2 + 5 v_2^2 + 4\left((v_1 + v_2)^2 - (v_1^2 + v_2^2)\right) + v_3^2$$

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$$

$$= v_1^2 + v_2^2 + 4 (v_1 + v_2)^2 + v_3^2$$

$$\geq 0$$

mit Gleichheit nur dann, wenn $v_1, v_2, v_1 + v_2, v_3 = 0$

d.h. $\langle v, v \rangle_A \geq 0$ und „=" $\Rightarrow v = 0$