0

MfP I, Woche 15, Seminar

2. Februar 2022

- Orga
  - Probeklausur?
  - Sprechstunden
  - Klausur
- Stoff
  - § 14.1 (Stetigkeit)
  - § 14.2 (Diff$\frac{\text{bar}}{}$keit) → ggf. Axiome von metr. Räumen wiederholen
  - Der ganze Rest!

Zusammenfassung der Inhalte in §4,1

- Metrische Räume (Axiome)
- ε-δ-Definition von Stetigkeit
- Abschluss mittels Berührungspkt
- Abschluss mittels Folgen

- Stetigkeit in Berührungspkt mittels ε-δ
- Stetigkeit in Berührungspkt mittels Folgen
- $x \longrightarrow a \Longrightarrow f(x) \longrightarrow \pm\infty$
- $x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) \longrightarrow\ ??$
- gleichmäßige + Lipschitz Stetigkeit

- **RR** (Rechenregeln) inkl. Komposition
- Sandwich: $f \leq g \leq h$ und $f(x), h(x) \longrightarrow y \Longrightarrow g(x) \longrightarrow y$
- stetiges f auf $[a, b]$ erreicht Sup/Inf
- stetiges f(Intervall) = Intervall
- *Wichtiger Satz:* **der ZWS**
- Monotonie: Defn + Zusammenhang zur Stetigkeit
- Inverses von streng monoton stetig auf Intervallen.

Zusammenfassung der Inhalte in §4,2

- Grunddefinition von Diffbarkeit

- **RR** (Rechenregeln) inkl. Ableitung von f^{-1} und l'Hôspital
- Maxima/Minima
- *Wichtiger Satz:* **der MWS**
- Monotonie: Korrespondenz mit Ableitung

- n-mal Diffbarkeit
- Taylor-Reihe bis zum n. Glied
- Restterm der n. Taylor-Entwicklung (mittels MWS)

Probeklausur I aus IPSP$_1$

3

Problem 4 Ƶ aus $A \setminus B = B \setminus A$ $(*)$
folgt $A = B$.

$\subseteq$: Sei $x \in A$ beliebig.

Dann $x \notin B \setminus A$.

Wegen $(*)$ folgt $x \notin A \setminus B$,

d.h. $\underbrace{x \notin A}_{\text{unmöglich}}$ od. $x \in B$

Also $x \in B$.

$\Rightarrow \forall x \in A: x \in B$, d.h. $A \subseteq B$

$\supseteq$: Wegen der Symmetrie der Situation lässt sich analog zeigen, dass $B \subseteq A$.

Darum gilt $A = B$. $\blacksquare$

Problem 3 $\quad (a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

$$a_n \xrightarrow[n]{} a, \quad b_n \xrightarrow[n]{} b$$

Z: $\quad \max\{a_n, b_n\} \longrightarrow \max\{a, b\}.$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann ex. $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n \geq N_1: \quad |a - a_n| < \varepsilon \qquad (*_1)$$

$$\forall n \geq N_2: \quad |b - b_n| < \varepsilon. \qquad (*_2)$$

Setze $N := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$.

Für $n \geq N$ gilt

$$a_n \leq a + |a_n - a| \overset{(*_1)}{<} a + \varepsilon < \max\{a, b\} + \varepsilon$$

$$b_n \leq b + |b_n - b| \overset{(*_2)}{<} b + \varepsilon < \max\{a, b\} + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \max\{a_n, b_n\} < \max\{a, b\} + \varepsilon$$

Analog (durch Vertauschung von a_n mit a bzw. b_n mit b) gilt

$$\max\{a, b\} < \max\{a_n, b_n\} + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq N: \quad |\max\{a_n, b_n\} - \max\{a, b\}| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \ | \;" \; - \; " \;| < \varepsilon$$

d.h. $\max\{a_n, b_n\} \xrightarrow[n]{} \max\{a, b\}.$ $\blacksquare$

Problem 4 Zu untersuchen: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n+2}{n^2+n+3}}_{=:a_n}$

Absolute Konv. $|(-1)^n a_n| = a_n = \frac{n}{n^2+n^2+3n^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \frac{1}{n} = +\infty$,

divergiert nach Minorantenkrit $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n|$.

Darum ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ nicht abs. konv.

Konvergenz Wir wollen das L-K anwenden.

Hierfür ist zu zeigen (i) $(a_n)_n$ Nullfolge

(ii) $(a_n)_n$ monoton (fallend)

Zu (i):

$|a_n| = a_n \leq \frac{n+2}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \xrightarrow[n]{} 0+0 = 0$

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist Nullfolge

(bitte wenden!)

Zu (ii): Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\iff \frac{n+3}{n^2+2n+1+n+1+3} \leq \frac{n+2}{n^2+n+3}$$

$$\iff (n+3)(n^2+n+3) \leq (n+2)(n^2+3n+5)$$

$$\iff \cancel{n^3} + 4n^2+6n+9 \leq \cancel{n^3} + 5n^2+11n+10$$

$$\iff 0 \leq n^2+5n+1$$

was offensichtlich gilt, da $n^2, 5n, 1 \geq 0$.

Darum gilt $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n$.

D.h. $(a_n)_n$ monoton fallend.

$$\xRightarrow{LK+(i)+(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergent}$$

(aber nicht abs.)

Probeklausur II aus IPSP$_1$

4