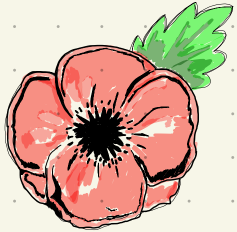
MfP I, Woche 5, Seminar

10 November 2022

0



Agenda

ORGA
- Umfrage am 24.11
-
-
- Noten/Moodle

BISHER...
- Lösungen zu **HA 4**
  - $\cup$
  - sup/inf
  - Ind x2

Konzept

AKTUELL...
- Lehrstoff:
  - Konvergenz mittels $\underline{\lim} + \overline{\lim}$
    - Monotonie
    - sup/inf
    - lim sup/lim inf
    - Eindeutigkeit
  - ε-N Definition von Konvergenz
    - $|\cdot|$
    - Cauchy-Krit.
    - Eindeutigkeit
  - Bsp. ...
  - Conv-Krit.
- **Sem 5**

$x \in \bigcap_n X_n \iff x$ in <u>allen</u> X_n

$x \cancel{\in} \bigcup_n X_n \iff x$ in ~~(mind.)~~ keinem X_n.

1

Hausaufgabe 4.1

Seien $X_n := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x^2 \le \pi^2 - 2\pi \cdot 2^{-n} + 2^{-2n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkte <u>nicht leere</u> Mengen.

a) Vereinfachen Sie soweit wie möglich die Menge $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und begründen Sie *kurz*, ob das Infimum bzw. Supremum zur Vereinigung gehört.

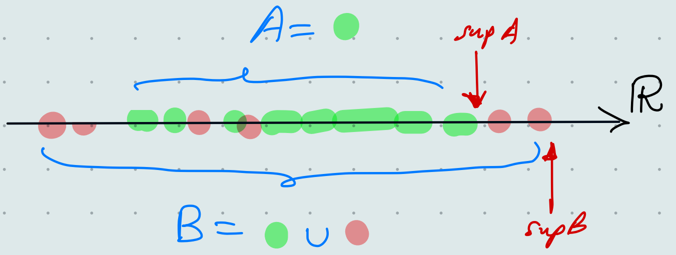
$$\begin{aligned}
X &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x^2 \le (\pi - 2^{-n})^2\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le |x| \le \pi - 2^{-n}\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-(\pi - 2^{-n}),\, \pi - 2^{-n}] \\
&= (\inf_{n\in\mathbb{N}} -(\pi - 2^{-n}),\, \sup_{n\in\mathbb{N}}(\pi - 2^{-n})) \\
&= (-\pi,\, \pi)
\end{aligned}$$ **1**

Sei $x \in (-\pi, \pi)$ wähle $n \in \mathbb{N}$ s.d. $2^{-n} < \pi - x$ und s.d. $2^{-n} < x + \pi$

Die Endpunkte $\pm\pi$ liegen in keiner der X_n und somit gehören Infimum und Supremum nicht dazu. **2**

Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beide nach **oben** beschr., nicht leer.

b) **Beh.** $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$



Intuition hinter HA 4.1 b).

Bew. – $A, B \neq \emptyset$ und nach oben beschr. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\alpha := \sup A \\ \beta := \sup B\end{array}\right\}$ existieren

– $\beta \geq$ alles in B; $B \supseteq A \Rightarrow \beta \geq$ alles in A, d.h. β <u>eine</u> Oberschr. für A.

– α ist per Def^{n} von Sup die <u>kleinste</u> Oberschranke von A $\Rightarrow$ $\alpha \leq \beta$

m.a.W. $\sup A \leq \sup B$ $\square$

3

Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beide nach **oben** beschr., nicht leer.

Notation $A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$

Beh. $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$

Bew.

c) $(\leq)$: Informationslage:

1) $A, B \neq \emptyset$, nach oben beschr. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \alpha := \sup A \\ \beta := \sup B \end{array}\right\}$ existieren

$\Downarrow$

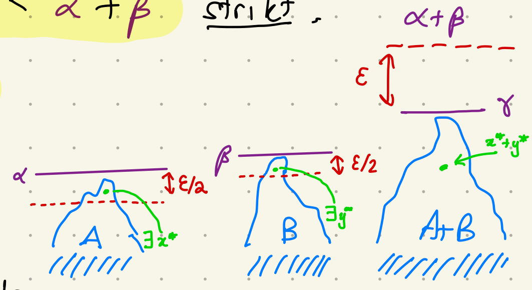
2) $A+B \neq \emptyset$ und $\forall x \in A, y \in B: x+y \leq \alpha + \beta$ $\Rightarrow$ $A+B$ nach oben beschr.

$\Rightarrow$ $\gamma := \sup(A+B)$ existiert. (und $\leq \alpha+\beta$!)

Zu zeigen $\gamma \geq \alpha + \beta$

Angenommen, dies sei nicht der Fall, d.h. $\gamma < \alpha + \beta$ (*) strikt.

- Wähle $\varepsilon := (\alpha+\beta) - \gamma \Rightarrow \varepsilon \in (0, \infty)$ wegen (*)
- per Def^n von Sup ex. $x^* \in A \cap (\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha]$
  $y^* \in B \cap (\beta - \frac{\varepsilon}{2}, \beta]$
- Also $\underbrace{x^* + y^*}_{\in A+B,} > \alpha + \beta - \varepsilon = \gamma$ per Konstr.
  $\Rightarrow x^* + y^* \leq \sup(A+B) = \gamma$



Widerspruch!

Darum gilt $\gamma \leq \alpha + \beta$ $\square$

Notation $sB := \{ sx \mid x \in A \}$ für $B \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$

d) Beh 1. Für $t > 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer, nach oben beschr. gilt $\sup tA \leq t \sup A$

Bew. - $\alpha := \sup A$ existiert, (da $A \neq \emptyset$ und nach oben beschr.)

- für $y \in tA$ gilt $y = tx$ für ein $x \in A$

$$\Rightarrow x \leq \sup A = \alpha$$
$$\Rightarrow y = tx \leq t\alpha \qquad \text{(siehe VL / ÜB 3)}$$

$\Rightarrow$ $tA \neq \emptyset$, nach oben beschr. (durch $t\alpha$)

$\Rightarrow$ $\sup tA$ ex. und ist per Def^{n} die kleinste Obeschr., insbes. $\leq t\alpha$.

D. h. $\sup tA \leq t \cdot \sup A$. $\square$

Wegen der Allgemeinheit von Behauptung 1 kann man die Aussage auf (t^{-1}, tA) statt (t, A) anwenden, da $t^{-1} > 0$ und $tA \neq \emptyset$ + nach oben beschr.

Es folgt: $(\sup A =) \sup t^{-1} tA \leq t^{-1} \cdot \sup tA \overset{\text{siehe VL}}{\Longrightarrow} t \cdot \sup A \leq \sup tA$.

Darum gilt Gleichheit.

Konvergenz — Allgemeines Konzept

auch $x_i \longrightarrow \tilde{x}$

od: $x_i \rightarrow \tilde{x}$

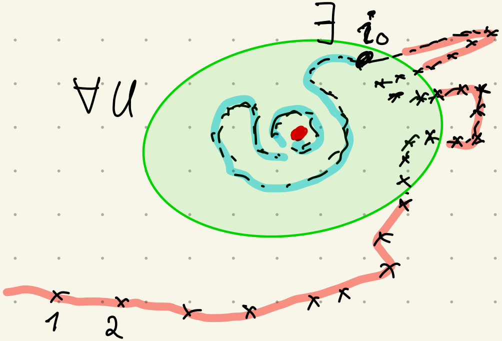
langer Pfeil!

Begriffe
- „Raum" $\mathbb{X}$ ← erstmals $\mathbb{X} = \mathbb{R}$
- „Punkt" $\tilde{x} \in \mathbb{X}$
- „Netz" $(x_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{X}$ ← für euch reicht es mit $I = \mathbb{N}$

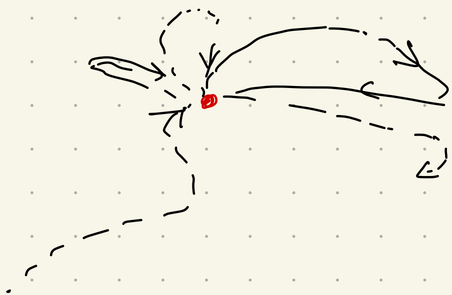
$(x_i)_{i \in I} \longrightarrow \tilde{x}$

$:\Longleftrightarrow$ „egal wie **nah** du den Zaun um $\tilde{x}$ malst, ab **irgendwann** sind alle x_i da drin"

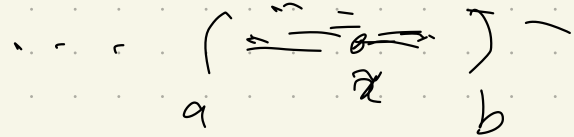
$$\Longleftrightarrow \quad \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } \tilde{x} : \underbrace{\exists i_0 : \forall i \geq i_0 :}_{\text{„ab irgendwann"}} \; x_i \text{ in } U$$



Bsp. Konvergenz



Der besondere Fall: $\mathbb{R}$



$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \tilde{x}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, U \text{ der Form } (\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon) : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq n_0 : x_k \in U$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq n_0 : x_k \in (\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq n_0 : |x_k - \tilde{x}| < \varepsilon$$

Def$^{\underline{n}}$ $(x_n)_n$ heißt **konvergent** gdw. $\exists\, \tilde{x}$ s.d. $x_n \xrightarrow[n]{} \tilde{x}$.

Basic Fakten

<u>Satz</u> $(x_n)_n$ monoton $\nearrow$ und nach oben beschr. $\Longrightarrow$ $x_n \longrightarrow \sup_n x_n$

<u>Satz</u> " " $\searrow$ " " unten " $\Longrightarrow$ $x_n \longrightarrow \inf_n x_n$

<u>Satz</u> $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \Longleftrightarrow (x_n)_n$ konv. und zwar

auch.

$x_n \longrightarrow \limsup_n x_n$

<u>Satz</u> $(x_n)_n$ erf. C-K $\Longleftrightarrow$ $(x_n)_n$ konv.

(aber gegen was — der Satz schildert dies nicht!)

$$x_1 = a$$
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

f stetig

$$x_n \longrightarrow \tilde{x} \quad \overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc} f(x_n) & \longrightarrow & f(\tilde{x}) \\ \| & & \\ x_{n+1} & \longrightarrow & \tilde{x} \end{array}$$

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := 2^{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2^n \longrightarrow +\infty$

(b) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := 2^{2^{-n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ $n \to +\infty \Longrightarrow 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

(c) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n := 2^{-n} \sin(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ <++> $\Longrightarrow 2^{2^{-n}} \longrightarrow 2^0 = 1$

div

(d) $(w_n)_n$ mit $w_n := (1-2^{-n})\sin(\frac{\pi}{2}n)$

$(2^{2^n})_n$ ist monoton steigen, weil $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \geq 2^{2^n}$

$2^{n+1} = \underbrace{2}_{>1} \cdot \underbrace{2^n}_{>0} \geq 2^n$

und nicht nach oben beschr., weil für $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 2$ gilt $2^{2^n} \geq 2^{2^{n_0}} \geq r$:

für alle $n \geq n_0$

mit $n_0 := \lceil \log_2(\log_2 r) \rceil$:

Darum divergiert $(2^n)_n$ bestimmt gegen $+\infty$

Wir kennen $2^{2^n} \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also divergiert auch $(2^{2^n})_n$ best. gegen $+\infty$

Angenommen, $x_n = 2^{2^n} \longrightarrow a$ für ein $a \in \mathbb{R}$

D. h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \quad |x_n - a| < \varepsilon$

insbes. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \quad x_n < a + 1$ (*)

Setze $\tilde{n} := \max\{\lceil \log_2 \log_2 (|a|+4) \rceil, n_0\} \in \mathbb{N}$

Dann wegen (*) gilt $x_{\tilde{n}} < a + 1$

Per Konstr. gilt
$$x_{\tilde{n}} = 2^{2^{\tilde{n}}} \geq 2^{2^{\log_2 \log_2 (|a|+4)}} = |a| + 4 > a + 1$$

$\lfloor 5{,}01 \rfloor = 5$

$\lceil 5{,}01 \rceil = 6$

Widerspruch.

Darum erf. (x_n), das C-K nicht, also divergiert.

$$x_n = 2^{-n}\sin(n) \qquad -1 \leq \sin(\cdot) \leq +1$$

$$\Rightarrow \underbrace{2^{-n}\cdot -1}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \leq x_n \leq \underbrace{2^{-n}\cdot 1}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$\Rightarrow \quad x_n \longrightarrow 0$ laut $\equiv$-Krit.

Beh $x_n = 2^{2^{-n}} \xrightarrow[n]{} 1$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$.

Setze $n_0 := \left\lceil -\log_2 \log_2 \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rceil$ (*)

Dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$1 - \varepsilon < 1 = 2^0 \underbrace{\leq}_{\substack{\text{Mon. von} \\ t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t \in \mathbb{R}}} \underbrace{2^{2^{-n}}}_{x_n} \leq 2^{2^{-n_0}} \overset{(*)}{\leq} 1 + \varepsilon/2 < 1 + \varepsilon$$

also $-\varepsilon < x_n - 1 < \varepsilon$

d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 1| < \varepsilon$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 1| < \varepsilon$.