



☑ Orga — Lösungen

☑ HA 7 ?

○ Stoff : ○ (abs Konvergenz vs. Divergenz) $\begin{matrix} \rightarrow Q-K \\ \rightarrow W-K \end{matrix}$

○ Q-K/W-K aussagekräftig $\iff \dots ??$

○ \forall^* „für fast alle“

○ \exists^* „es gibt ∞ viele, so dass“

☑ Sem 8

31A 7. x

Hausaufgabe 7.3

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, 0]$ eine monoton wachsende Nullfolge.

- Zeigen Sie mithilfe des Cauchyriteriums, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $s_{n,m} = \sum_{k=n}^{n+m} (-1)^k x_k$ konvergiert.
- Wir definieren die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $t_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{n,m}$. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ansatz ohne C-K

Vorarbeit

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x_{n+j}$

$(m+1)$ -partielle Summe: $\sum_{j=0}^m (-1)^j x_{n+j} = (-1)^n \sum_{k=n}^{m+n} (-1)^k x_k = (-1)^n s_{n,m}$ *

a) $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq (-\infty, 0]$ mon. Nullfolge

$\Rightarrow (x_{n+j})_{j=0}^{\infty} \subseteq (-\infty, 0]$ mon. Nullfolge

$\Rightarrow (|x_{n+j}|)_{j=0}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ mon. Nullfolge

$\stackrel{L-K}{\Rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x_{n+j}$ konv.

$\Rightarrow \left(\sum_{j=0}^m (-1)^j x_{n+j} \right)_{m=1}^{\infty}$ konv.

$\Rightarrow ((-1)^n s_{n,m})_m$ konv. $\Rightarrow (s_{n,m})_m$ konv. [da $(-1)^n$ bzgl. m konst]

Ansatz mit C-K

NR₁:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$

Sinn dahinter?
um x_k mit x_{k+1}
in „Kontakt“ zu
bringen!

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=a+1}^b (-1)^k x_k \right| &= \left| \frac{1}{2} \left(\sum_{k=a+1}^b (-1)^k x_k + \sum_{k=a}^{b-1} (-1)^{k+1} x_{k+1} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \left(\sum_{k=a}^b \left((-1)^k x_k + (-1)^{k+1} x_{k+1} \right) - (-1)^{b+1} x_{b+1} - (-1)^a x_a \right) \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=a}^b |x_k - x_{k+1}| + |x_a| + |x_{b+1}| \right) \\ &\stackrel{(x_n)_n \subseteq (-\infty, a], \rightarrow}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=a}^b (|x_k| - |x_{k+1}|) + |x_a| + |x_{b+1}| \right) \\ &\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{2} (|x_a| - |x_{b+1}| + |x_a| + |x_{b+1}|) \\ &= |x_a| \end{aligned}$$

Also $\left| \sum_{k=a+1}^b (-1)^k x_k \right| \leq |x_a|$

NR₂: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 < m_2$. Dann

$$|S_{n, m_2} - S_{n, m_1}| = \left| \sum_{k=n}^{n+m_2} (-1)^k x_k - \sum_{k=n}^{n+m_1} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+m_1+1}^{n+m_2} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| (-1)^n \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-1)^k x_k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (-1)^k x_k \right| \stackrel{NR_1}{\leq} |x_{m_1}|$$

Falls $m_1 = m_2$, dann $|S_{n, m_2} - S_{n, m_1}| = 0 \leq |x_{m_1}|$ auch.

Darum $|S_{n, m_2} - S_{n, m_1}| \leq |x_{\min\{m_1, m_2\}}|$ im Allgemeinen.

Jetzt können wir a) beweisen:

a) Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $(x_k)_k$ eine Nullfolge ist, ex. $N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall k \geq N: |x_k| < \varepsilon \quad **$$

Für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1, m_2 \geq N$ gilt

$$|s_{n, m_2} - s_{n, m_1}| \stackrel{NR_2}{\leq} |x_{\min\{m_1, m_2\}}| \stackrel{Mon}{\leq} |x_N| \stackrel{**}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m_1, m_2 \geq N: |s_{n, m_2} - s_{n, m_1}| < \varepsilon$$

d.h. $(s_{n, m})_m$ erfüllt das C-K. //

b) Aus a) mit $n=1$ eingesetzt erhält man, dass

$$\left(\sum_{k=1}^m (-1)^k x_k \right)_{m=2}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{1+m} (-1)^k x_k \right)_{m=1}^{\infty} \text{ konv.}$$

$$\Rightarrow \text{(per DEFIN von Reihe)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k \text{ konv.}$$

\Rightarrow

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k x_k \right)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$$

Basiswissen
über Teilsummen

$$= t_n$$

$$\Rightarrow (t_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0 \quad //$$

Nebenrechnung

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} x_{n+k}$$

$$\stackrel{\text{DEFN}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (-1)^{n+k} x_{n+k}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} s_{n,m} =: t_n$$

Hintergrundstoff

Begriffe (endl. / unendl. / koendl.)

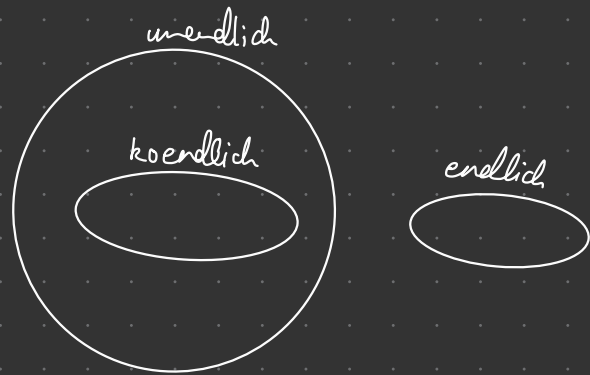
\forall^* „für fast alle“

\exists^* (auch \exists^∞ ... verführerisch „für ∞ viele“)

WK

QK

- Vorab
- $A \subseteq X$ endl. gdw. $|A| \in \mathbb{N}_0$
 - $A \subseteq X$ unendl. gdw. $|A| \notin \mathbb{N}_0$.
 - $A \subseteq X$ koendl. gdw. $X \setminus A$ endl.



Bsp (Teilmengen von \mathbb{N} od. \mathbb{N}_0)

$\{2, 3, 8, 1000007\}$ ist endlich.

\emptyset ist endlich

\mathbb{N} ist koendlich (\Rightarrow unendlich)

\mathbb{P} ist unendlich aber nicht koendlich

$\{5000, 5001, 5002, \dots\}$ ist koendlich (\Rightarrow unendlich)

Sei $\Phi(n)$ irgendeine Aussage (bspw. " $|x_n| \frac{1}{n} \leq q$ ").

— $\forall^* n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$ od. "für fast alle n gilt $\Phi(n)$ "

spielt keine Rolle!

bedeutet: $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ ist ko endlich

$\equiv \{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\} = \mathbb{N} \setminus \tilde{I}$ für ein endl. $\tilde{I} \subseteq \mathbb{N}$

$\equiv \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \Phi(n)$

— $\exists^* n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$ od. "für ∞ viele n gilt $\Phi(n)$ "

spielt keine Rolle!

bedeutet: $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ ist unendlich

\equiv ex. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

s.d. $\Phi(n_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_n x_n \quad (\text{abs}) \text{ konv. ? / div. ?}$$

schwächste Form

stärkste Form

Varianten von W-K

$$\textcircled{1} \quad \lim_n |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \limsup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1): \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_0}^{\text{„für fast alle“}}: |x_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$$

[lim ex. & < 1] $\Rightarrow \sum_n x_n$ abs konv.

$$\textcircled{2} \quad \lim_n |x_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow \limsup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow \underbrace{\exists n \in \mathbb{N}_0}_{\text{„ex. \infty viele“}}: |x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$$

[lim ex. & > 1] $\Rightarrow \sum_n x_n$ divergiert

$$\sum_n x_n \quad (\text{abs}) \text{ konv. ? / div. ?}$$

schwächste Form

stärkste Form

Varianten von Q-K (Ann: $x_n \neq 0$ für alle n)

„für fast alle“

$$\textcircled{1} \quad \lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1) : \forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq q$$

[lim ex. & < 1] $\Rightarrow \sum_n x_n$ abs konv.

$$\textcircled{2} \quad \lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \Rightarrow \left(\limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$$

[lim ex. & > 1] $\Rightarrow \sum_n x_n$ divergiert.

diese Impl. gilt,
aber nicht umgekehrt

diese Impl.
gilt nicht

Fazit

- Die 3. Variante ist jeweils die am stärkste Variante
- Die 1. od. 2. Varianten sind zwar schwächer, aber dafür oft viel einfacher zu prüfen
- Oft ea. kein $\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ bzw. $\lim_n |x_n|^{1/n}$ aber $\limsup \dots$ kann man **stets** berechnen
- **ACHTUNG!** Für Q-K bei Divergenz sagt $\limsup \dots > 1$ **nichts** aus!
- nicht aussagekräftig wenn weder (1) noch (2) gilt

Sem 8.x

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^3}{z^{n^2}}$, wobei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$

Vorarbeit Sei $a_n := n$. Glied.

Dann

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!^3 |z|^{n^2}}{n! |z|^{(n+1)^2}} = \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^3 \cdot \frac{1}{|z|^{(n+1)^2 - n^2}} \\ &= \frac{(n+1)^3}{|z|^{2n+1}} \quad \text{--- } = 2(n+1) - 1 \\ &= |z| \cdot \frac{(n+1)^3}{|z|^{2(n+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(weil $|z| > 1$ und
"Exp schlägt Poly")

Q-K anwenden:

Also $\rho := \limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 0 < 1$.

Da $\rho < 1$, konv. nach Q-K die Reihe absolut.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Vorarbeit

Sei $x_n := \prod_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$

Dann

$$\begin{aligned} |x_n|^{1/n} &= x_n^{1/n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \right)^{1/n} \\ &\leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right)^{1/n} \\ &= \left(e^{-\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right)^{1/n} \\ &= e^{-\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \implies \text{leichte Induktionsaufgabe} \\ &= e^{-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

W-K anwenden:

Also $\rho := \limsup_n |x_n|^{1/n} \leq e^{-\frac{1}{3}} < 1$.

Da $\rho < 1$, konv. nach W-K die Reihe absolut.