MfP I, Woche 4, Seminar

3. November 2022

0

Agenda

- HA 3.x
- Seminaraufgaben 4.x
  - $\infty - \bigcup$
  - sup / inf
  - Induktion

1

HA 3.1

Seien X, Y, Z Mengen und $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ beliebig.

a) Angenommen, $\exists\ h: Y \to X$ eine Fkt mit $f \circ h = id_Y$ und $h \circ f = id_X$.

Beh. f ist bijektiv.

Bew.

Inj. $\forall x, x' \in X: f(x) = f(x') \Rightarrow x = \boxed{id_X(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x))}$ ← wie hier

$= h(f(x')) = \dots = x'$

Darum ist f injektiv.

Surj. Sei $y \in Y$ bel. Setze $x^* := h(y) \in X$.

Dann $f(x^*) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = id_Y(y) = y$.

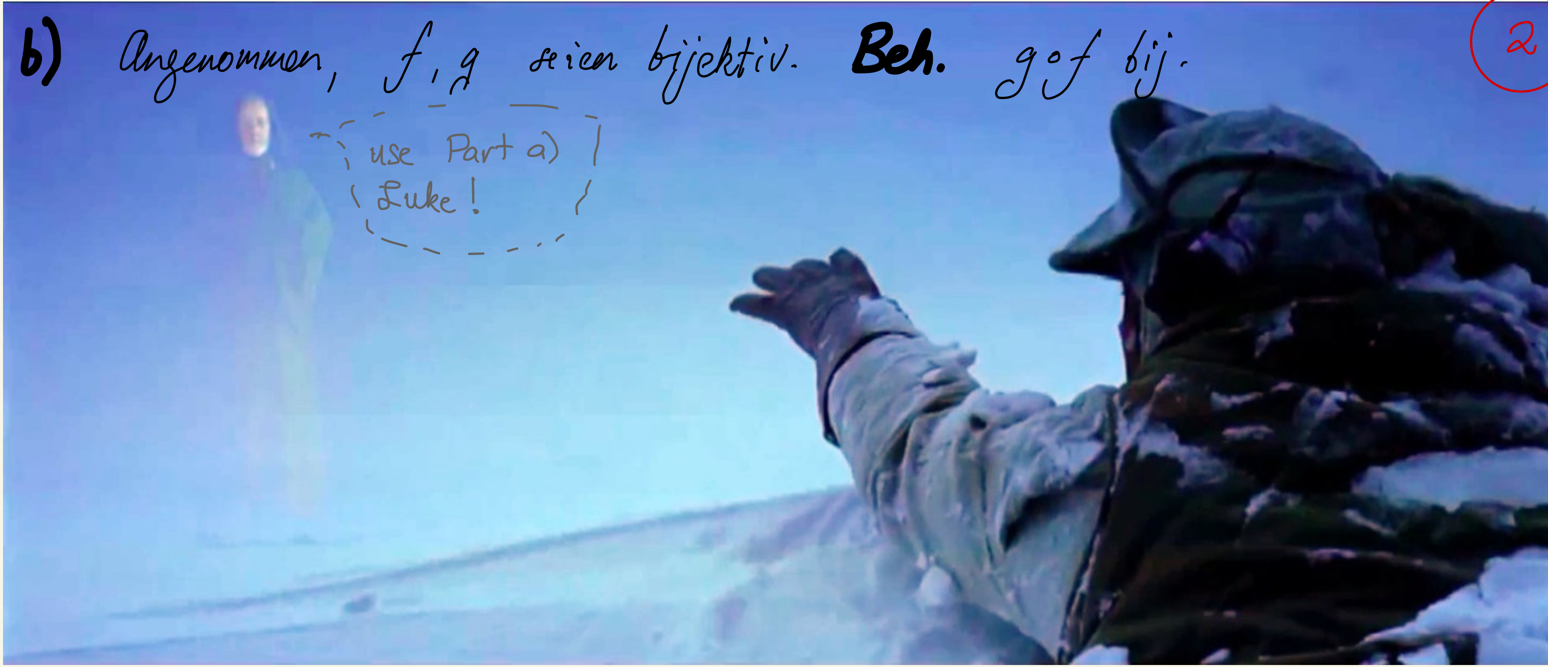
d.h. $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$

d.h. f ist surjektiv.

Darum ist f bijektiv.

2

b) Angenommen, f, g seien bijektiv. **Beh.** $g \circ f$ bij.



Bew.

Setze $h := f^{-1} \circ g^{-1}$. Dann

$$h \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X$$

und

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_X \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Y$$

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ invertierbar laut **a)** $\square$

3

HA 3.2 Seien $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$.

siehe auch 1.21 aus VL

a) Beh. $(-x)(-y) = xy$

Bew. Es gilt $(-x)(-y) \overset{②}{=} -(x(-y)) \overset{②}{=} -(-xy) \overset{\overbrace{\text{inv inv} = \text{id}}}{=} xy$ $\square$

Nebenargumente ① $\forall a \in \mathbb{R}: 0a = 0 = a0$

Bew. Für $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
0 &= -a + a && \text{Ax. Inv. für } + \\
&= -a + 1 \cdot a && \text{Ax. Neutr. für } \cdot \\
&= -a + (1+0) \cdot a && \text{Ax. Neutr. für } + \\
&= -a + (1a + 0a) && \text{Ax. l. Distr. } \cdot \text{ über } + \\
&= -a + (a + 0a) && \text{Ax. Neutr. für } \cdot \\
&= (-a + a) + 0a && \text{Ax. Assoz. für } + \\
&= 0 + 0a && \text{Ax. Inv. für } + \\
&= 0a && \text{Ax. Neutr. für } +
\end{aligned}$$

und analog für $0 = a0$.

siehe auch 1.22 aus VL

② $\forall a, b \in \mathbb{R}: (-a)b = -ab = a(-b)$ $\square$

Bew. Für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(-a)b &= (-a)b + ab + -ab && \text{Ax. Neutr. \& Ax. Inv für } + \\
&= (-a + a)b + -ab && \text{Ax. l. Distr. } \cdot \text{ über } + \\
&= 0b + -ab && \text{Ax Inv. für } + \\
&= 0 + -ab && \text{wegen ①} \\
&= -ab && \text{Ax. Neutr. für } +
\end{aligned}$$

und analog für $a(-b) = -ab$. $\square$

4

b) **Beh.** $x \leq y$ und $u \leq v \Rightarrow x+u \leq y+v$

Bew. " und " $\overset{O5(u)}{\Rightarrow} x+u \leq y+u$ und $u \leq v$

$\overset{O5(y)}{\Rightarrow} x+u \leq y+u \leq y+v$

$\overset{\text{Trans.}}{\Rightarrow} x+u \leq y+v.$ $\square$

c) **Beh.** $x \leq y$ und $z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$

Bew. " und " $\Rightarrow x \leq y$ und $0 \leq -z$ Satz 1.23 (i)

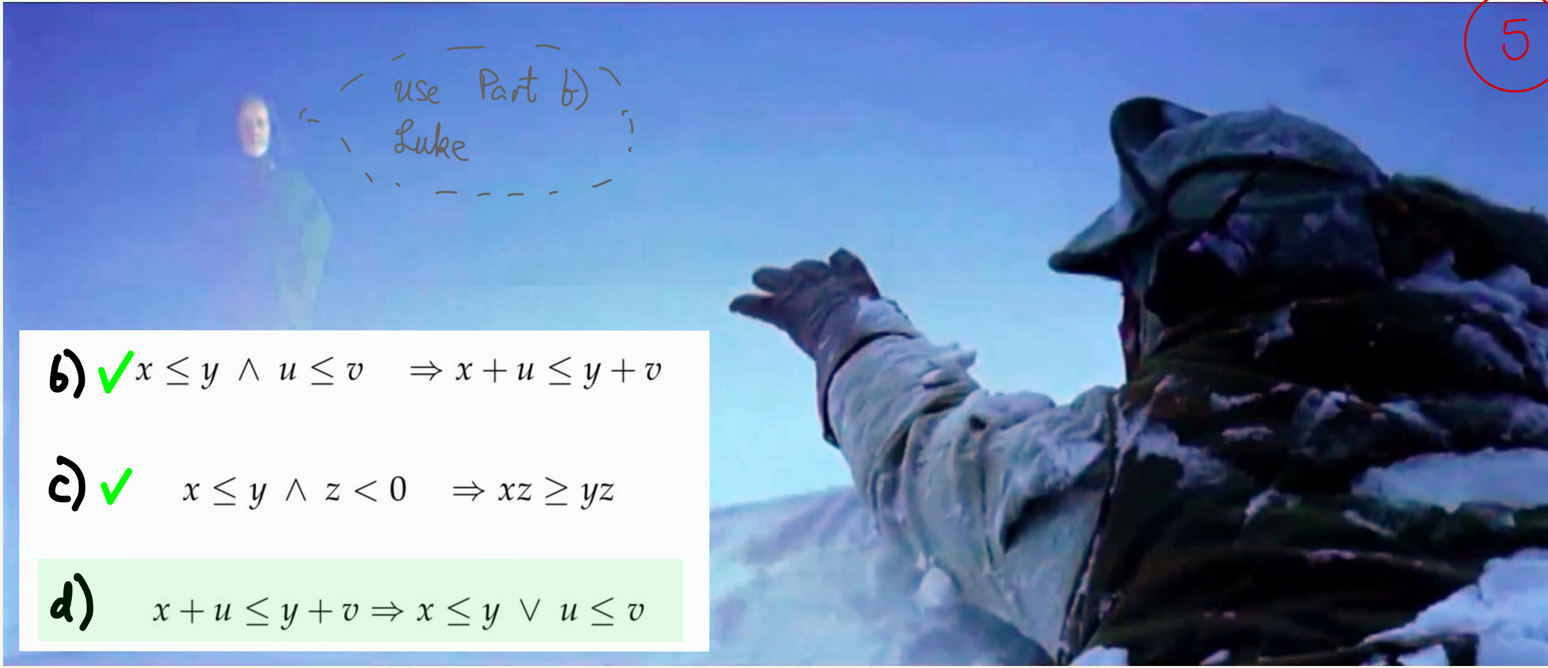
$\overset{O5(-x)}{\Rightarrow} 0 = x-x \leq y-x$ und $0 \leq -z$

$\Rightarrow 0 \leq (y-x)(-z)$ Satz 1.23 (iii)

$= xz - yz$ (Algebra)

$\Rightarrow yz \leq xz$ $\square$

5



b) ✓ $x \leq y \wedge u \leq v \quad \Rightarrow x + u \leq y + v$

c) ✓ $x \leq y \wedge z < 0 \quad \Rightarrow xz \geq yz$

d) $x + u \leq y + v \Rightarrow x \leq y \vee u \leq v$

Kontraposition: $\neg$(rechte Aussage) $\equiv \overbrace{y < x}^{*}$ und $\overbrace{v < u}^{**}$ — pos wegen $*$ und $**$

$\overset{b)}{\Longrightarrow} \quad y + v \leq x + u$

$\Rightarrow$ Gleichheit gilt nicht, weil { Sonst $(x-y) + (u-v)$ $= (x+u) - (y+v)$ $= 0$ Aber pos + pos = pos $\neq 0$

$\Rightarrow \quad y + v < x + u \quad \equiv \neg$ (linke Aussage) $\square$

6

Nebenbeweis für „pos + pos = pos"

Beh. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \ a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

Bew. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt wegen **O6** $ab \geq 0$.

Da aber a, b und ab invertierbar sind und 0 nicht, folgt $ab \neq 0$.

Also $ab \geq 0$ aber $ab \neq 0$, d.h. $ab > 0$. $\square$

HA 3.3 Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann ex. $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ mit $q, q' > 0$ und $\frac{p}{q} = x$, $\frac{p'}{q'} = y$.

7

- additives Inverses: $-x = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$ weil $-p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
- Addition: $x + y = \frac{(pq' + p'q)}{qq'} \in \mathbb{Q}$ weil $(pq'+p'q) \in \mathbb{Z}$, $qq' \in \mathbb{N}$
- Multiplikation: $xy = \frac{pp'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ weil $pp' \in \mathbb{Z}$, $qq' \in \mathbb{N}$
- multiplikatives Inverses: $x \neq 0 \Rightarrow p \neq 0$

$$\Rightarrow x^{-1} = \frac{q}{p} = \begin{cases} \frac{q}{|p|} & : p > 0 \\ \frac{-q}{|p|} & : p < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{Q}$ da $q, -q \in \mathbb{Z}$, $|p| \in \mathbb{N}$.

Auch $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$, $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$.

Darum ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ unter allen Körperoperationen stabil und enthält 0 und 1. Da $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist, folgt das $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ebenfalls einer ist.

Sem. 4.1

$\bigcap''' = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : t \in X_n\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ in allen } X_n\}$

a) $X := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq 2t < 2\hbar + \frac{2}{n^3}\}}_{=: X_n}$, $\quad X_n = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < \hbar + \frac{1}{n^3}\}$
$= [0, \hbar + \frac{1}{n^3})$

$$\Rightarrow X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \hbar + \frac{1}{n^3}) \overset{*}{=} [0, \hbar]$$

Begr. von $*$

- jedes $t \in [0, \hbar]$ in allen X_n (wieso?) $\Rightarrow t \in \bigcap_n X_n$

  $\hookrightarrow [0, \hbar] \subseteq X$

- $t \in X \overset{\bigcap}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N} : t \in X_n \overset{\text{Konstr.}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq t \leq \hbar + \frac{1}{n^3}$

  d.h. t u. Schr. von $\{\hbar + \frac{1}{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

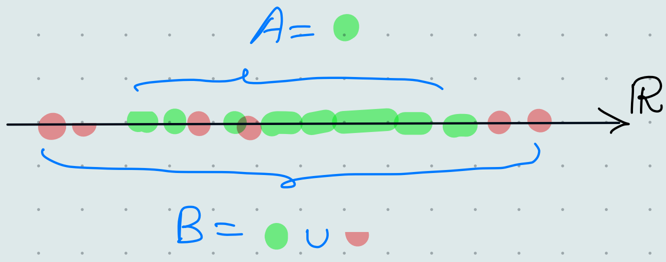
  $\Rightarrow 0 \leq t \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \hbar + \frac{1}{n^3} = \hbar$

  $\Rightarrow t \in [0, \hbar]$

  $\hookrightarrow X \subseteq [0, \hbar]$

Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beide nach **unten** beschr., nicht leer.

b) **Beh.** $A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$



Intuition hinter Sem 4.1 b).

Bew. Da $A \subseteq B$ ist die gr. u. Schr. von B automatisch eine u. Schr. von A. Daraus folgt $\inf B \leq$ gr. u. Schr. von A $= \inf A$.

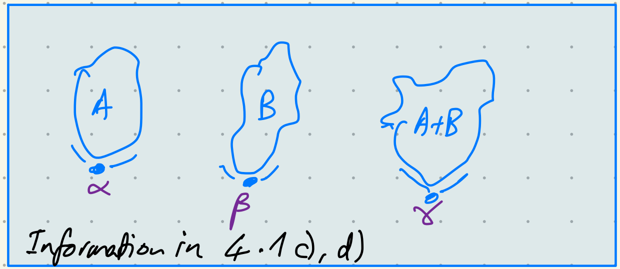
- $A, B \neq \emptyset$ und sind nach u. beschr. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\alpha := \inf A\\ \beta := \inf B\end{array}\right\}$ existieren
- β u. Schr. von B und damit, da $B \supseteq A$, eine von A.
- $\Rightarrow \beta \leq$ gr. u. Schr. von $A = \alpha$. d.h. $\inf B \leq \inf A$ //

Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beide nach <u>unten</u> beschr., nicht leer. 10

Notation $A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$

Beh. $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Bew.



c) $(\geq)$: – A, B nach unten beschr., $A, B \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\alpha := \inf A$ existieren
$\beta := \inf B$

– $A+B \neq \emptyset$ (weil $A, B \neq \emptyset$) $x \geq \alpha$ und $y \geq \beta$

und für $x \in A$, $y \in B$ gilt $x+y \geq \alpha + \beta$

$\Rightarrow$ (da Elemente in $A+B$ genauso definiert) $\underline{\alpha+\beta}$ eine u. Schr. von $A+B$

$\Rightarrow$ darum ist $A+B \neq \emptyset$ und <u>nach u. beschr.</u> (und zwar durch $\underline{\alpha+\beta}$)

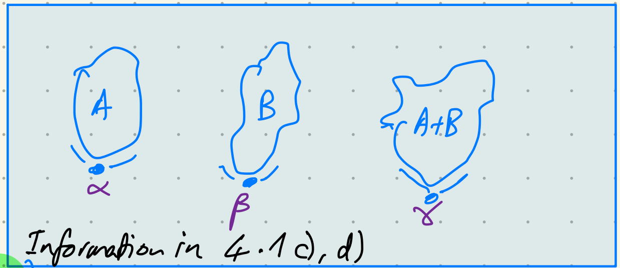
$\Rightarrow$ $\gamma := \inf(A+B)$ existiert und $\gamma \geq \underline{\alpha+\beta}$.

d.h. $\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$

Gegeben $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beide nach <u>unten</u> beschr., nicht leer.

Notation $A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$

Beh. $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$



Bew.

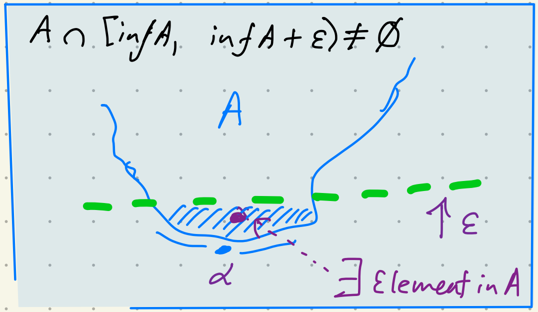
d) $(\leq)$: **Angenommen,** nicht. Dann

$$\inf(A+B) > \inf A + \inf B$$

d.h. $\gamma > \alpha + \beta$

Wähle $\varepsilon \in (0,\infty)$ s.d. $\varepsilon < \frac{\gamma-(\alpha+\beta)}{2}$ (*)

z.B. $\varepsilon := \frac{\gamma-(\alpha+\beta)}{4}$



Dann ex. $x^* \in A$ mit $x^* < \alpha + \varepsilon$

$y^* \in B \cap [\beta, \beta+\varepsilon)$

Es gilt

$$A+B \ni x^* + y^* < \alpha + \beta + 2\varepsilon < \gamma \quad \text{per Wahl (*)}$$

Aber $\gamma = \inf(A+B) \leq x^* + y^*$

Widerspruch!

Darum gilt $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$. $\square$

Sem 4.2

Beh. $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\forall\ n\text{-el. Menge } X: \quad |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}}_{\Phi(n)}$

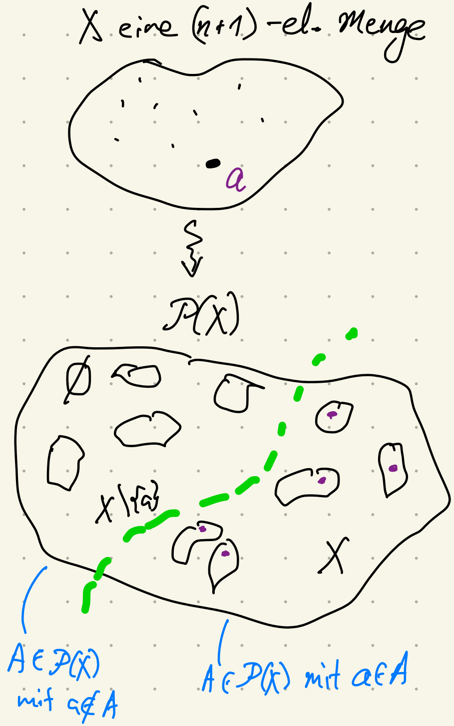
Bew.

IA: Sei $n = 1$. Sei X ______

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, $\Phi(n)$ gelte.

Ind.S: Sei X ______

Konklusion:



Sem 4.3 Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots \in [0, \infty)$ beliebig. 12

Beh. $\forall n \in \mathbb{N}: \overbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{m_n :=} \geq \sqrt{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{=: q_n}}}^{Q(n)}$ *

$Q(1): x_1 \geq \sqrt{x_1^2}$

Bew. Setze $d_n := m_n^2 - q_n$.

IA: Sei $n=1$. Dann l. S. von * $= x_1 = \sqrt{x_1^2} =$ r. S. von *

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, $Q(n)$ gelte. $\Rightarrow Q(1)$ gilt.

Ind. S: Z: $Q(n+1)$ gilt. Berechnungen:

$$m_{n+1}^2 = (m_n + x_{n+1})^2 = m_n^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} m_n$$

$$q_{n+1} = q_n + x_{n+1}^2$$

Reicht aus zu zeigen, dass $m_{n+1}^2 \geq q_{n+1}$ (äqv. $d_{n+1} \geq 0$)

Man beobachte, dass

$$m_{n+1}^2 - q_{n+1}$$

$$\iff \quad m_n^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}m_n \geq q_n + x_{n+1}^2$$

$$\iff \quad m_n^2 + 2x_{n+1}m_n \geq q_n$$

$$\iff \quad \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}_{\overset{IV}{\geq} \sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \underbrace{2\sum_{k=1}^{n} x_{n+1}x_k}_{\geq 0 \text{ weil alle } x_i \geq 0} \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Die letztere (und damit die 1.) Aussage ist also wahr.

Darum gilt $Q(n+1)$.

Konklusion: Also gilt $\forall n \in \mathbb{N}: Q(n)$. $\square$