MfP I, Woche 6, Seminar

17. November 2022

0

1

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Untersuchen Sie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Wiederholen Sie (a) für $a \in (1, \infty)$.

a) C-K: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |g_m - g_n| < \varepsilon$

$\geq$ ✗ od. $>$ ✓ od. $\leq$ ✓

Nebenrechnung: Seien $m,n \in \mathbb{N}$ o.E. mit $m \leq n$. Dann

$$|g_n - g_m| \leq |a|^m \cdot \frac{1}{1-|a|} \qquad g_n = \frac{1-a^n}{1-a}$$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Da $(|a|^n)_n \longrightarrow 0$ (da $|a| < 1$),

ex. N s.d. $|a|^n < (1-|a|)\,\varepsilon$ für $n \geq N$.

$\Rightarrow$ für $m,n \geq N$:

$$|g_m - g_n| \leq |a|^{\min\{m,n\}} \cdot \frac{1}{1-|a|}$$

$$< (1-|a|)\,\varepsilon \cdot \frac{1}{1-|a|} = \varepsilon$$

2

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Untersuchen Sie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Wiederholen Sie (a) für $a \in (1, \infty)$.

b) C-K: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |g_m - g_n| < \varepsilon$

best. $\text{div}_{+\infty}$: $\forall K > 0 . \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : g_n \geq K$.

gilt $g_n \geq a^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $K > 0$. Da $(a^n)_n \longrightarrow +\infty$ (da $a > 1$),

ex. $N \in \mathbb{N}$ s.d. $a^n \geq \underline{1 + (a-1)K}$ für $n \geq N$

Für $n \geq N$ gilt also $g_n = \dfrac{a^n - 1}{a-1} \geq K$

Also divergiert $(g_n)_n$ best. gegen $+\infty$.

3

c) Seien $d_1, d_2, d_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ als »Ziffern« betrachtet. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die reelle Zahl mit Dezimaldarstellung

$$r_n := 0,\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

Z. B. falls $d_1 = 0$; $d_2 = 1$; $d_3 = 1$; $d_4 = 8$; ..., dann gelten

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,000000000000\ldots \\ r_2 &= 0,010101010101\ldots \\ r_3 &= 0,011011011011\ldots \\ r_4 &= 0,011801180118\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Untersuchen Sie $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) C-K: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |r_m - r_n| < \varepsilon$

Nebenrechnung: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ o.E. mit $m \leq n$. Dann

$\alpha \in \mathbb{N}$, $s, s' \in [0, 1]$

$$10^m r_m = \overbrace{d_1 d_2 \ldots d_m}^{\alpha :=} , \overbrace{\overline{d_1 d_2 \ldots d_m}}^{=: s}$$

$$10^m r_n = \underbrace{d_1 d_2 \ldots d_m}_{\alpha :=} , \underbrace{\overline{d_{m+1} d_{m+2} \ldots d_n \, d_1 d_2 \ldots d_m \, d_{m+1} \ldots d_n}}_{=: s'}$$

$$\Rightarrow 10^m (r_m - r_n) = (\alpha + s) - (\alpha + s') = s - s' \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow |r_m - r_n| \leq 10^{-m}.$$

4

Seminaraufgabe 6.2

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge und $s \in (0, \infty)$. Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle das C-K. Beweisen Sie, dass $(x_{\lceil sn\rceil})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls das C-K erfüllt.

C-K: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : \quad |x_{\lceil sm\rceil} - x_{\lceil sn\rceil}| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Z: für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{\lceil sm\rceil} - x_{\lceil sn\rceil}| < \varepsilon$ für $m,n \geq N$ (*)

Konstruktion
- per Annahme ex. $N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall m,n \geq N_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$
- nach Archimedes-Prinzip ex. $N_1 \in \mathbb{N}$ s.d. $sN_1 \geq N_0$ (z.B. $N_1 := \max\{\lceil \frac{1}{s} N_0 \rceil, 1\}$)

Für $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \geq N_1$ gelten

$$\lceil sm \rceil \geq sm \geq sN_1 \geq N_0$$
$$\lceil sn \rceil \geq sn \geq sN_1 \geq N_0$$

also wegen (*) gilt

$$|\underbrace{x_{\lceil sm\rceil}}_{\geq N_0} - \underbrace{x_{\lceil sn\rceil}}_{\geq N_0}| < \varepsilon.$$

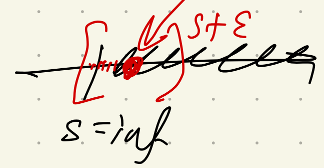
Darum $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |x_{\lceil sm\rceil} - x_{\lceil sn\rceil}| < \varepsilon$, d.h. C-K erf.

5

Seminaraufgabe 6.3

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Beweisen Sie ausführlich, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das C-K erfüllt. Was ist der Grenzwert?

C-K: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |x_m - x_n| < \varepsilon$ z.z. –



$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |x_m - x_n| < \varepsilon$

$s := \inf_n x_n$ (ex. per Annahme)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

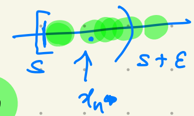
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Z: ex. $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall \cancel{m}, n \geq N_\varepsilon : |x_m - x_n| < \varepsilon$.

per Def^n von Inf. ex. $n^* \in \mathbb{N}$ s.d.

$$s \leq x_{n^*} < s + \varepsilon$$

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap [s, s+\varepsilon) \neq \emptyset$



Setze $N_\varepsilon := n^*$

Dann für $\cancel{m}, n \geq N_\varepsilon$ gilt wegen Monotonie

$$(s \leq)\ \cancel{x_m},\ x_n \leq x_{N_\varepsilon} = x_{n^*} < s + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{x_m},\ x_n \in [s, s+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |x_{\cancel{m}} - \cancel{x_n}| < |(s+\varepsilon) - s| = \varepsilon$$

6

Seminaraufgabe 6.4

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie mithilfe des C-K, dass die Folge $(x_n := \cancel{\sup}\ \text{inf}\{u_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Was ist der Grenzwert?

- Wegen Beschr. ex. $M \in [0, \infty)$, s.d. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [-M, M]$

  $\Rightarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n := \{u_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset, \ \subseteq [-M, M]$

  $\Rightarrow$ $(x_n =)\ \sup A_n$ ex. und $\in [-M, M]$

  $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ (nach unten) beschr. *

- Für $m \leq n$ in $\mathbb{N}$ gilt $A_n \subseteq A_m$,

  also $(x_n =) \sup A_n \leq \sup A_m (= x_m)$ (siehe ÜB 2)

  $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ monoton fallend **

Aus * + ** folgt (vgl. Sem 6.3) $x_n \xrightarrow{n} \inf_n x_n$

$$= \inf_n \sup_{k \geq n} u_k$$

$$(= \limsup_n u_n)$$

Fa

Hausaufgabe 5.1

a) Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?

b) Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).

c) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

a) Sei $\varepsilon > 0$.

Für $n \geq N$ gilt

$$|\alpha_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$\exists N \; \forall n \geq N \; \ldots - \; < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : |\cdots| < \varepsilon$

$$\Rightarrow (\alpha_n)_n \xrightarrow[n]{} c$$

7b

Hausaufgabe 5.1

✓ **a)** Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?

b) Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).

c) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

b) *Nebenrechnung*

$$a_n = \frac{2(\overbrace{\cancel{n^2-5}}^{} +5)+5n}{n^2-5}$$

$$= 2 + \frac{5n+10}{n^2-5}$$

$$= 2 + \frac{n}{n^2} \cdot \frac{5+\frac{10}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}$$

$$= 2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n]{} 0} \cdot \underbrace{\frac{5+\frac{10}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}}_{\xrightarrow[n]{} \frac{5+0}{1-0} = 5}$$

$$\xrightarrow[n]{} 2 + 0 \cdot 5 = 2$$

✓ $\frac{p(n)}{q(n)} \to 0$

$\Rightarrow$ Folge konvergent mit $\lim_n a_n = 2$ //

7c

Hausaufgabe 5.1

✓ **a)** Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?

✓ **b)** Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).

c) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

c) 1) $|y_n|, |z_n| = n \xrightarrow[n]{} \infty \Rightarrow$ Folgen divergieren. (aber nicht bestimmt, da Vorzeichen alternieren)

$\forall K > 0:$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq K$ z.B. $N = \lceil K \rceil$

dann $\forall n \geq N: |y_n| = n \geq N \geq K$

d.h.

$\forall K > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |y_n| \geq K.$

$\forall K > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: y_n \geq K$ ✗

2) $y_n + z_n = -(-1)^n n + (-1)^n n = 0 \xrightarrow[n]{} 0$

$\Rightarrow (y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. mit $\lim_n (y_n + z_n) = 0$

8

Hausaufgabe 5.2

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \sqrt{n^2+2n} - n$.

a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.

b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.

d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den Grenzwert. Für festes $\varepsilon > 0$ wählen Sie nun $n \in \mathbb{N}$, so groß, dass $|x - x_n| \leq \varepsilon$.

(Ohne Nebenrechnung) für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_m - x_n = \sqrt{m^2+2m} - \sqrt{n^2+2n} - (m-n)$$

$$= \frac{(m^2+2m) - (n^2+2n)}{\sqrt{\cdots} + \sqrt{\cdots}} - (m-n)$$

$$= (m-n)\left(\frac{(m+n)+2}{\sqrt{\cdots} + \sqrt{\cdots}} - 1\right)$$

= 😵‍💫😱

9

Hausaufgabe 5.2
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \sqrt{n^2+2n} - n$. $= \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.

b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.

d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den Grenzwert. Für festes $\varepsilon > 0$ wählen Sie nun $n \in \mathbb{N}$, so groß, dass $|x - x_n| \leq \varepsilon$.

Nebenrechnung für $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)}$

$\mathbb{N} \ni n \longmapsto n$ mon. steigend,

$\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \longmapsto 1+\frac{2}{n}$ mon. fallend, $\in [1+0, 1+\frac{2}{1}] = [1,3]$

$\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \longmapsto \sqrt{1+\frac{2}{n}}+1$ mon. fallend, $\in [\sqrt{1}+1, \sqrt{3}+1] = [2, 1+\sqrt{3}]$

$\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \longmapsto \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = x_n$ mon. steigend, $\in [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, \frac{2}{2}] = [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, 1]$

a) + b) erledigt: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. steigend, $\subseteq [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, 1]$, also beschr.

c) + d) mon. steigend + (nach oben beschr.) $\Rightarrow$ konv. gegen Supremum. $= 1$

Alternativ: $n \to \infty \Rightarrow \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow[n]{} \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1.$

RR

Also konv. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 1$ //

10

Hausaufgabe 5.3

Zeigen Sie mithilfe geeigneter Kriterien, dass die folgenden Folgen konvergieren und berechnen Sie den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vermöge $a_n := \frac{n+2}{n^2+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vermöge $b_n := \frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^4+5n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

NR

$\frac{2}{n} \longrightarrow 0$

$\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$

$\overset{RR+}{\Rightarrow} \quad 1+\frac{2}{n} \longrightarrow 1+0 = 1$

und $1+\frac{1}{n^2} \longrightarrow 1+0=1 \neq 0$

$\overset{RR_{DIV}}{\Rightarrow} \quad \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{1}=1$

$\overset{RR\cdot}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 0\cdot 1=0$

Also $a_n \xrightarrow[n]{} 0$

Also Grenzwert ex. und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Diese Schreibweise nicht verwenden:

$$\lim_n a_n \longrightarrow 0$$

Diese passen:

$a_n \longrightarrow 0$; $\quad a_n \xrightarrow[n]{} 0$; $\quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

$\lim\limits_n a_n = 0$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

11

Hausaufgabe 5.3
Zeigen Sie mithilfe geeigneter Kriterien, dass die folgenden Folgen konvergieren und berechnen Sie den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vermöge $a_n := \frac{n+2}{n^2+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vermöge $b_n := \frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^4+5n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}}}_{\to \frac{2+0}{1+0+0} = 2}$$

$$\xrightarrow[n]{} 0 \cdot 2 = 0$$

$\Rightarrow$ Folge konv. mit $\lim_n b_n = 0$