MfP I, Woche 7, Seminar

24. November 2022

0

- Orga:
  - 18:00 — Umfrage mit Frau C. Speicher
  - Moodle — Quizzes
- Heute: Sem 7

  ggf. einzelne Fragen zu Blatt 6

1

Seminaraufgabe 7.1

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vermöge $x_n := \frac{1}{1+n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

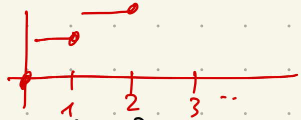
(a) Bestimmen Sie $\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Bestimmen Sie $\limsup x_n$.

(c) Konvergieren die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

a)+b) Beh. 1 $(x_n)_n$ ist **mon. fallend**

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$,
also
$$x_n = \frac{1}{1+\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$



Nebenrechnung
Falls $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, dann l.S. $= k + k = 2k = n$
Falls $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, dann l.S. $= (k-1) + k = 2k-1 = n$

Nun sind
$\mathbb{N} \ni n \mapsto \frac{n}{2} \in (0,\infty)$ mon. $\nearrow$ $\qquad n_1 \leq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \leq \frac{n_2}{2}$
$(0,\infty) \ni x \mapsto \lceil x \rceil \in (0,\infty)$ mon. $\nearrow$ $\qquad \Rightarrow \lceil \frac{n_1}{2} \rceil \leq \lceil \frac{n_2}{2} \rceil$
$(0,\infty) \ni t \mapsto \frac{1}{1+t} \in (0,\infty)$ mon. $\searrow$ $\qquad \Rightarrow \frac{1}{1+\lceil \frac{n_1}{2} \rceil} \geq \frac{1}{1+\lceil \frac{n_2}{2} \rceil}$

$\Rightarrow$ Komposition ist mon. $\searrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in (0,\infty)$ mon. $\searrow$

d.h. die Folge ist mon. $\searrow$, w.z.z.w. $\square$

Beh. 2 $(x_n)_n$ ist eine **Nullfolge**

$$\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \leq \tfrac{n}{2} < \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 1$$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann $1 + n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 0 + n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.
also $|x_n| = x_n = \frac{1}{1+\text{''}} \leq \frac{2}{n}$. $*$
Aus $\left(\frac{2}{n}\right)_n \longrightarrow 0$ + $*$ + $\equiv$ Lemma folgt $(x_n)_n \longrightarrow 0$ $\square$

Alternativer Bew für Beh. 1+2:

$$x_1 = \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{1+3-1} = \frac{1}{3} \qquad x_4 = \frac{1}{1+4-2} = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} x_{2k-1} &= \frac{1}{1+(2k-1)-\lfloor k-\frac{1}{2}\rfloor} = \frac{1}{2k-(k-1)} = \frac{1}{k+1} \\ x_{2k} &= \frac{1}{1+2k-\lfloor k\rfloor} = \frac{1}{k+1} \end{aligned}\right\} \text{für } k\in\mathbb{N}$$

$=$

Also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \dots\right)$

$\Rightarrow (x_n)_n$ monoton fallend und,

da $\left(\frac{1}{n}\right)_n \to 0$ und $(x_n)_n$ diese Folge lediglich aufbläht,
so gilt $(x_n)_n \longrightarrow 0$.

Aus Beh. 1 folgen $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = x_1 = \frac{1}{2}$

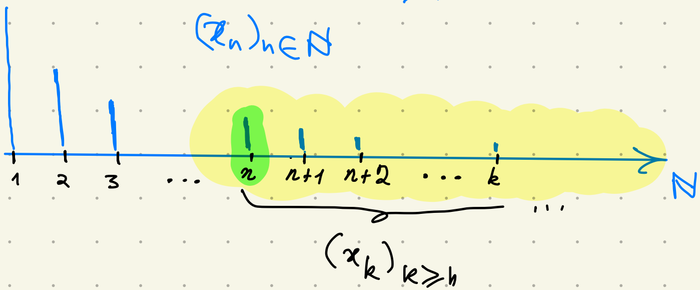
und $\sup\limits_{k \geq n} x_k = x_n$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n \overset{\text{DEFN}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$ [siehe Skizze]

$$= \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$= 0$$ wegen **Beh 2**

Skizze: wegen Monotonie gilt $\sup\limits_{k\geq n} x_k = x_n$.

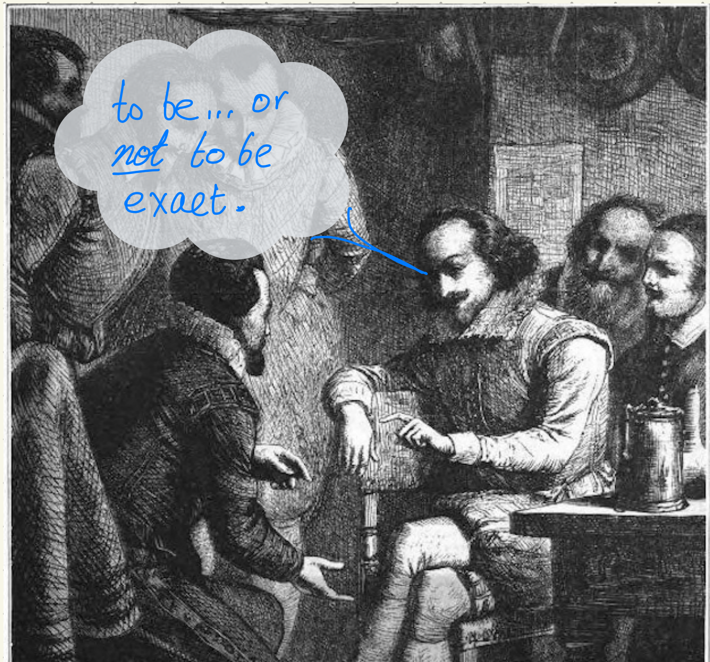


c) abs Konv. von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ③

$\mathcal{O}(n^1)$

⇝ wissen: Σ div.

⇝ aber wie formalisiert man dies?



WILL SHAKSPEARE AND BEN JONSON AT THE MERMAID TAVERN.

exakter Weg

Nebenrechnung

Fall 1 n gerade

$\Rightarrow$ ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $n = 2k$

$\Rightarrow n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2k - k = k$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\ldots} = \frac{1}{1+k} \geq \frac{1}{2k} = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2n}$$

Fall 2 n ungerade

$\Rightarrow$ ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $n = 2k-1$

$\Rightarrow n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = (2k-1) - (k-1) = k$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\ldots} = \frac{1}{1+k} = \frac{2}{n+3} \geq \frac{2}{4n} = \frac{1}{2n}$$

inexakter Weg

Nebenrechnung

per Def^{n}: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor > \frac{n}{2} - 1$

$$\Rightarrow 1 + n - \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor < 1 + n - \left(\tfrac{n}{2} - 1\right) = 2 + \frac{n}{2} \leq 2n + \frac{n}{2} = \frac{5}{2} n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\ldots} > \frac{1}{\frac{5}{2} n} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n}$$

(durch einen dieser Ansätze)

$x_n \geqslant C \cdot \frac{1}{n}$ für ein $C \in (0,\infty)$, für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geqslant \underbrace{C}_{>0} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{div. gegen } +\infty}$$

Min: Krit

$\Rightarrow$ (absolute) Reihe divergiert

$\Rightarrow$ Reihe konv. nicht absolut.

Konv. von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$: wegen **Beh 1+2** + $(x_n)_n \subseteq [0,\infty)$,
ist das L-K erfüllt
$\Rightarrow$ Reihe konvergiert.


Schönen 1. Advent!