MfP I, Woche 9, Seminar

8. Dezember 2022

- [x] Orga
- [x] HA 8
- [x] Sem 9 + Konzepte
  - Was Vektoren *nicht* sind
  - Was ~~Vektorren~~ Vektorräume sind
  - Eigenschaften von Mengen von Vektoren

Konzepte / Stoff

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad |\psi\rangle,\quad \begin{pmatrix}5 & 8 & 1\\-3 & \sqrt{\pi} & 2\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}}$$

das ist <u>nicht</u> was Vektoren/Operatoren sind

... sondern lediglich praktische Darstellungen.

① Primäres Konzept: Vektor<u>räume</u>

<u>beliebige</u> Mengen V mit Struktur

- $(V, +, \mathbf{0})$ eine Gruppe   Addition
- $\mathbb{K} \curvearrowright V$ „wirkt auf"   Skalarmult.

② Vektoren sind lediglich die Gegenstände solche Räume

③ Zweck Berechnungen benutzen wir Spalten/Zeilen/Raster — aber unnötig!

Beispiele

VR	Körper	Vektoraddition / Skalarmultiplikation	
$\mathbb{K}^n$	$\mathbb{K}$	$(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)$	$\alpha (x_i)_i := (\alpha x_i)_i$
$\mathbb{K}[X]$ Polynome	$\mathbb{K}$	$\sum_{k=0}^{m} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} b_k X^k := \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k) X^k$	setze $=0$ für $k>m$; setze $=0$ für $k>n$
		$\alpha \sum_{k=0}^{n} c_k X^k := \sum_{k=0}^{n} \alpha c_k X^k$	
$C(\underline{X})$ stetige Fkt			
$\ell^p(\mathbb{N})$			
$L^p(\mathbb{R}^d)$			

$\ell^p(\mathbb{N})$: Folgen mit $\sum_n |x_n|^p < \infty$

$L^p(\mathbb{R}^d)$: Fkt mit $\int |f(x)|^p \, dx < \infty$

sehr nützlich in der Physik!

„punktweise“ Operationen

Grundbegriffe

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$. Seien $U \subseteq V$, $B \subseteq V$

z.B. $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$
aber muss nicht endlich sein!

B heißt linear unabh. gdw. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ versch.
$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$
$\sum_i c_i x_i = 0 \Rightarrow$ alle $c_i = 0$

$\neg$ alle $c_i = 0 \Longrightarrow \sum_i c_i x_i \neq 0$

Erzeugendensys. gdw. $\forall x \in V : \exists u_1, u_2, \ldots, u_n \in B$
$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$
s.d.

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

Basis gdw. l.u. + E.S.

U heißt UVR gdw. U unter $+$ und Skalarmult abgeschl. und $0 \in U$.

Konstruktionen / Größen

Sei V VR. über $\mathbb{K}$

$\dim(V) := |B|$ wobei $B \subseteq V$ eine Basis.

$\leadsto$ auf ersten Blick sieht dies nicht wohldefiniert aus

... auf dies stellt sich als unabh. von B und damit
<u>doch</u> als wohldefiniert heraus!

- Für unendlichen Fall ist der Beweis sehr einfach ($\leadsto$ Schubfachprinzip)

- Für endlichen Fall brauchen wir Basisumtauschsatz od. das Gaußverfahren (kniffliger!).

Konstruktionen / Größen

Seien V VR. über $\mathbb{K}$

$S \subseteq V$ beliebig definieren wir

$$\mathrm{lin}(S) := \{ \text{alle } \underline{\text{endl.}} \text{ lin Komb aus Vekt. in } S \}$$

$$= \Big\{ \sum_{e \in F} c_e e \;\Big|\; F \subseteq S \text{ endl.}, \ (c_e)_{e \in F} \subseteq \mathbb{K} \Big\}$$

Sem 9

6

Seminaraufgabe 9.1

Bilden die Mengen mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}^3$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum?

a) $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y = 1 \right\}$

b) $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y = z \right\}$

Anmerkung: $\mathbb{C}^3$ bildet bekanntermaßen unter den kanonischen, ko-ordinatenweise Operationen einen VR über $\mathbb{C}$ (siehe [VL, Bsp. 3.3 (ii)]).

Darum gilt für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}^3$ versehen mit denselben Operation:

$(*)$
$$\left\{\begin{aligned} X \text{ VR über } \mathbb{C} &\iff X \text{ UVR von } \mathbb{C}^3 \\ &\iff 0 \in X \text{ und } X \text{ unter } + \text{ und Skalarmult. stabil} \\ &\iff 0 \in X \text{ und } \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C} : \alpha x + y \in X. \end{aligned}\right.$$

7

a) W ist kein VR über $\mathbb{C}$, da

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in W$ aber $2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \notin W$

[da $1+0=1$] [da $2+0\neq 1$]

b) Beh.: U bildet einen VR über $\mathbb{C}$:

Beweis:

• Für $u, v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

das heißt
$u_1+u_2=u_3$
und $v_1+v_2=v_3$ $\Big\}$ (+)

$$\begin{aligned}
(\alpha\cdot u+v)_1+(\alpha\cdot u+v)_2 &= (\alpha\cdot u_1+v_1)+(\alpha\cdot u_2+v_2)\\
&= \alpha\cdot(u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\
&\overset{(+)}{=} \alpha\cdot u_3+v_3\\
&= (\alpha\cdot u+v)_3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ per Def^n ist also $\alpha\cdot u+v \in U$

• Also $\forall u,v\in U, \alpha\in\mathbb{C}$: $\alpha u+v\in U$

• $\Rightarrow$ laut (∗) bildet also U einen VR über $\mathbb{C}$.

8

Seminaraufgabe 9.2

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\}$ die Menge der Abbildungen, versehen mit der Addition $(p+q)(x) := p(x) + q(x)$ und der Multiplikation mit Skalaren $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$ für $x \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{R})$.

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|^2$ für $x \in \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = |x|^4$ für $x \in \mathbb{C}$.

a) Sind f und g linear unabhängig?

b) Berechnen Sie die lineare Hülle von $\{f, g\}$, siehe auch Gleichung 1.

c) Gibt es Eigenschaften, die alle Vektoren in $\mathrm{lin}(\{f, g\})$ erfüllen?

Anmerkung: $\mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{R})$ versehen mit den o.s. punktweise Operationen bildet einen VR (siehe [VL, Bsp 3.3 (iv)]).

a) Beh. f, g sind l.u.

Bew. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = \mathbb{O}$ (*)

Z: $\alpha, \beta = 0$

- Aus (*) erhält man

$$\begin{cases} 0 = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(1) = \alpha \cdot f(1) + \beta \cdot g(1) = \alpha + \beta \\ 0 = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(\sqrt{2}) = 2\alpha + 4\beta = 2(\alpha + 2\beta) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lösung dieses LGS: $\alpha = \beta = 0$. $\square$

a) (Alternativer Beweis mit Ansatz wie [VL, Bsp. 3.5(iii)]) 9

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g = 0$$

die 0 im VR Abb($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) ist die konstante Fkt $x \longmapsto 0$

Dann erfüllt das Polynom

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$: x \longmapsto \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x^4$$

$h(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Wir brauchten diese Beschränkung, um uns von den $|\cdot|$ zu befreien!)

Da h ein Polynom ≤ 2. Grades ist und $\mathbb{R}$ keine Nullteiler hat, hat h max 2 Nullstellen, es sei denn, beides $\alpha, \beta = 0$.

Da $|\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}| = |\mathbb{R}| > 2$, folgt dass $\alpha, \beta = 0$.

$\Longrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ \alpha f + \beta \cdot g = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Longrightarrow \{f, g\}$ lin. unabhängig. $\square$

10

b) $$\mathrm{lin}(\{f,g\}) = \{\alpha\cdot f + \beta\cdot g \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{h:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \mid \exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \forall x\in\mathbb{C}: h(x) = \alpha|x|^2+\beta|x|^4\}$$

c) Die Fkt in $\mathrm{lin}(\{f,g\})$ sind genau die radial symmetrischen Fkt, die im Radius 0 ($\equiv$ Ursprung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ betrachtet) 0 sind und sich wie eine Parabel in r^2 entwickeln.

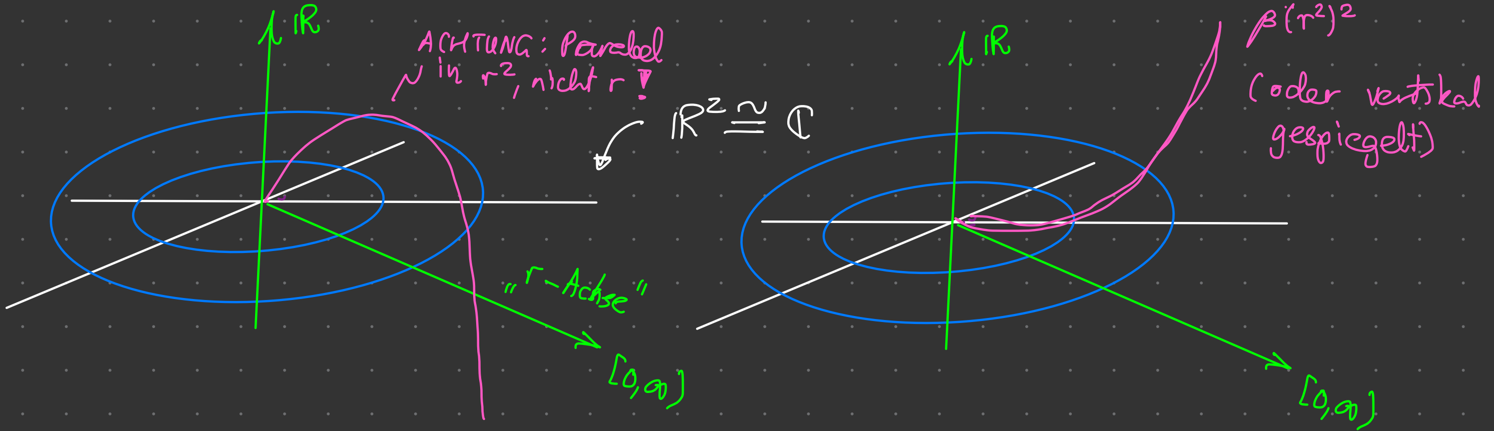

FIG 1: wie typische Fkt in $\mathrm{lin}\{f,g\}$ aussehen.