MfP I, Woche 3, Seminar

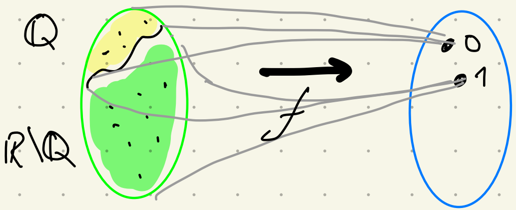
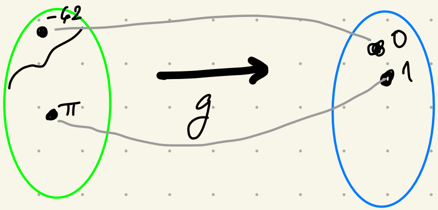
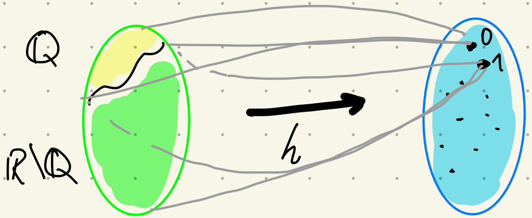
27. Oktober 2022

0

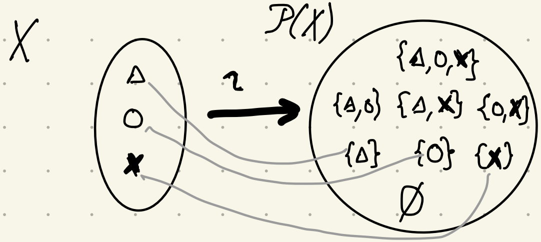
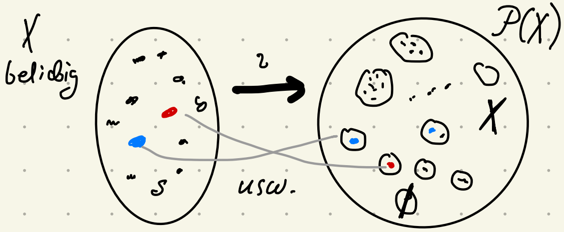
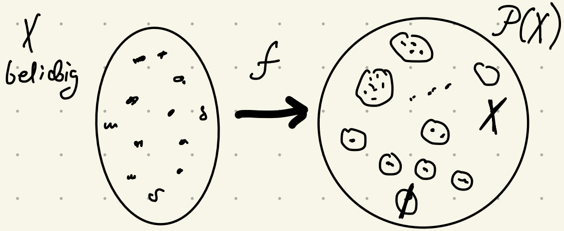
Agenda

- Sem 3
- HA 2

Sem 3.1

Funktion	wohldefiniert	injektiv	surjektiv	bijektiv
	✓	✗ $f(\frac{1}{2})=0=f(\frac{3}{2})$	✓ $f(0)=0$ $f(\pi)=1$	✗ nicht inj
	✓	✓ $g(-42)\neq g(\pi)$ also da $X=\{-42,\pi\}$ gilt $\forall x_1,x_2: x_1\neq x_2 \Rightarrow g(x_1)\neq g(x_2)$	✓	✓ weil inj + surj
	✓	✗ z.B. $h(2)=0=h(4)$	✗ weil für kein $x\in\mathbb{R}$ gilt: $h(x)=2$ $2\notin \mathrm{Bild}(h)$	✗

2

Funktion	wohldefiniert	injektiv	surjektiv	bijektiv
				
 d.h. $\iota(x) = \{x\}$				
	✓	egal	✓	egal

???
existiert so ein f mit als Eigenschaften??

Sem 3.2

Axiome von Relationen (X, R).

Hier X irgendeine Menge
$R \subseteq X \times X$ binäre Relation

AxRefl. $\forall x \in X: \quad x R x$ $\quad x \leq x$

AxIrrefl. $\forall x \in X: \quad x \cancel{R} x$ $\quad x \not\leq x$

(!) **AxAntisymm.** $\forall x, y \in X: \quad x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$

$x \leq y \wedge y \leq x$

AxAsymm. $\forall x, y \in X: \quad x R y \Rightarrow y \cancel{R} x$

$x < y \Rightarrow y \not< x$

AxTrans. $\forall x, y, z \in X: \quad x R y R z \Rightarrow x R z$

AxLinearität/Totalität $\forall x, y \in X: \quad x R y \vee y R x \vee x = y$

Theorie von Halbordnungen/p. OR: Refl. + Antisymm + Trans

od. „Axiomatisierung"

Alternative: Irrefl. + Asymm. + Trans.

Theorie von (linearen) OR: Total + Refl. + Antisymm + Trans

Alternative Total + Irrefl. + Asymm. + Trans.

4

(partielle) Halbordnungsrelationen auf algebraischen Strukturen

z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

Monotonie von + : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \quad x \, R \, y \implies x+z \, R \, x+z$

Monotonie von · : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \quad x \, R \, y \implies xz \, R \, yz$

und $0 \, R \, z$

$(0 \leq z)$

Anmerkung Definition von $\leq$ in $\mathbb{Z}$: $m \leq n \;:\Longleftrightarrow\; n-m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

in $\mathbb{Q}$: $\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} \;:\Longleftrightarrow\; p_1 q_2 \leq p_2 q_1$ in $\mathbb{Z}$

$\in \mathbb{Z}$ $\quad \in \mathbb{N}$

in $\mathbb{R}$: $x \leq y \;:\Longleftrightarrow$ nicht trivial!! (ohne im Kreis zu laufen!!)

?? ??

5

a) Beh. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann

$$\left(x \leq y \text{ und } z \leq 0 \right) \implies xz \geq yz$$

Bew.

$$x \leq y \implies \text{weil } -z \geq 0$$

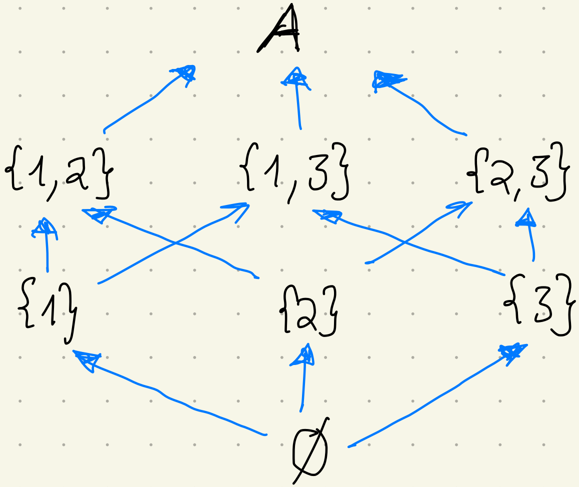
$$x \cdot -z \leq y \cdot -z$$

$$\implies -xz \leq -yz$$

$$\implies xz \geq yz$$

b) $A = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$ 6

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$:



Ax Refl:

Ax Antisymm:

Ax Trans:

Ax Tot:

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ ist (k)eine ____________________ .

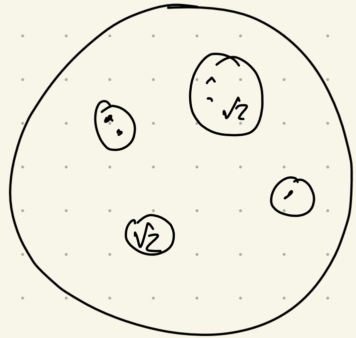
7

HA 2.1

a) $$X_1 = \{ S \in \mathcal{P}(\{\emptyset, 1, \sqrt{2}\}) \mid \sqrt{2} \notin S \}$$

$$= \mathcal{P}(\{\emptyset, 1\})$$

$$= \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\} \}$$



b) $$X_2 = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \{ n \in \mathbb{N} \mid p \text{ teilt } n \}$$

$$= \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{P} : p \text{ teilt } n \}$$

$$= \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ durch alle Primzahlen teilbar} \}$$

$$= \emptyset$$ weil keine Zahl durch alle ...

c) $X_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$

$A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 25\}$

$A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \geq 25\} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 5\}$

$A_3 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq 3\}$

$A_2 \supseteq A_1$

$$= A_2 \cup A_3$$

$$= \mathbb{N} \setminus \{4\}$$

$$= \{k \in \mathbb{N} \mid k \neq 4\}$$

HA 2.2

$2p = \underline{2}^1 \underline{p}^1$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad n \longmapsto 6^n$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P} \qquad n \longmapsto \max\{p \in \mathbb{P} \mid p \mid 2n\}$

	(wohldef)	inj	surj	bij
f	✓	✓	✗ $2 \notin \mathrm{Bild}(f)$	$\Rightarrow$ ✗
g	✓	✗ z.B. $g(5) = 5 = g(10)$	✓ $g(p) = $ max Primteiler von $2p$ $= \max\{2, p\} = p \quad \forall p \in \mathbb{P}$	nein

$6^n = 6^{n+k}$

$\Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow n = n + k$

Primzahlfaktorisierung

Log.

strikte Monotie

$\forall m, n \in \mathbb{N}: m < n$

$\Rightarrow 6^m < 6^n$

c) $\omega : A \longrightarrow B$ für $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\omega(n) = \frac{3n}{1+(-1)^n}$$

d.h. n ist der Form $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

Definitionsbereich

$$D(\omega) = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade} \} = \{ 2k \mid k \in \mathbb{N} \}$$

Es gilt $\omega(2k) = \dfrac{3(2k)}{1+(-1)^{2k}} = \dfrac{6k}{2} = 3k$

für $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\omega) &= \{ \omega(2k) \mid k \in \mathbb{N} \} \\ &= \{ 3k \mid k \in \mathbb{N} \} \\ &= \{ n \in \mathbb{N} \mid 3 \text{ teilt } n \} \end{aligned}$$

\vline

\mid

HA 2.3 $\qquad f: X \to Y, \qquad g: Y \to Z \qquad A \subseteq X$

$\qquad\qquad\qquad\qquad h: Z \to Y$

a) $\operatorname{Gph}\left(\overbrace{h^{-1}}^{Z \quad Y} \circ \overbrace{f|_A}^{Y \quad A}\right)$

$\overset{\text{Sem } 2.3}{=} \{(x,z) \in A \times Z \mid \exists y \in Y: (x,y) \in \operatorname{Gph}(f|_A)$ und $(y,z) \in \operatorname{Gph}(h^{-1})\}$

$= \{(x,z) \in A \times Z \mid \exists y \in Y: (x,y) \in \operatorname{Gph}(f)$ und $(z,y) \in \operatorname{Gph}(h)\}$ //

$= \{(x,z) \in X \times Z \mid \ldots\} \cap A \times Z$

Beh Sei $f: X \to Y$ eine inj. Fkt. Ann

Dann gilt

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

für alle $A_1, A_2 \subseteq X$.

Bew Seien $A_1, A_2 \subseteq X$ beliebig. Z: (i) $f(\overbrace{A_1 \cap A_2}^{C:=}) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ „leicht"

und (ii) $\quad$ " $\supseteq$ " $\cap$ "

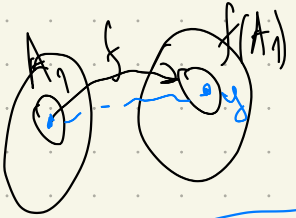
Zu (i): $C \subseteq A_1$ und $C \subseteq A_2$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \quad \text{wegen Monotonie}$$

$$f(C) \subseteq f(A_1) \qquad f(C) \subseteq f(A_2)$$

$$\Rightarrow f(C) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

Zu (ii). Z: (*) $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$



d.h. für alle $\boxed{y \in f(A_1) \cap f(A_2)}$ gilt $y \in f(A_1 \cap A_2)$

d.h. $y = f(x^*)$ für ein $x^* \in A_1 \cap A_2$

Def$^{\underline{n}}$ von $\cap$

$\Rightarrow \quad y \in f(A_1)$ und $y \in f(A_2)$

Def$^{\underline{n}}$ von Bildmengen

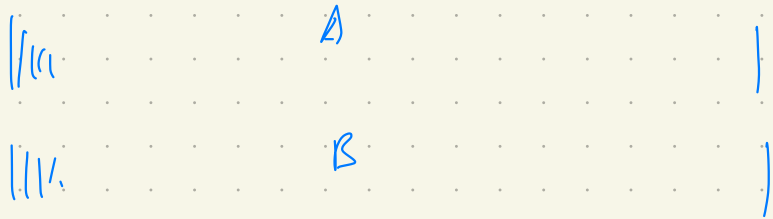
$\Rightarrow \quad y = f(x_1)$ und $y = f(x_2)$ für ein $x_1 \in A_1$ ** und $x_2 \in A_2$ ***

$\Rightarrow \quad (y =)\ f(x_1) = f(x_2)$

f inj.

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

Also aus (*) folgt $y = f(x^*)$ mit $x^* := x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ (wegen ** ***)



$\alpha = \inf A$

$\beta = \inf B$

$x + y \geq \alpha + \beta$

$\inf A + B \geq \alpha + \beta$

for $0 < \varepsilon < (\gamma - (\alpha + \beta))/2$

ex. $x \in A \cap [\alpha, \alpha + \varepsilon)$

$y \in B \cap [\beta, \beta + \varepsilon)$

$\Rightarrow \quad x + y \leq \alpha + \beta + 2\varepsilon < \gamma$

$$(1 + a)^{n+1} = \overbrace{(1 + a)}^{\geq 0}\,\overbrace{(1 + a)^n}^{\geq 1 + na}$$

$$\geq (1 + a)(1 + na)$$

$$= 1 + (n + 1)a + a^2$$