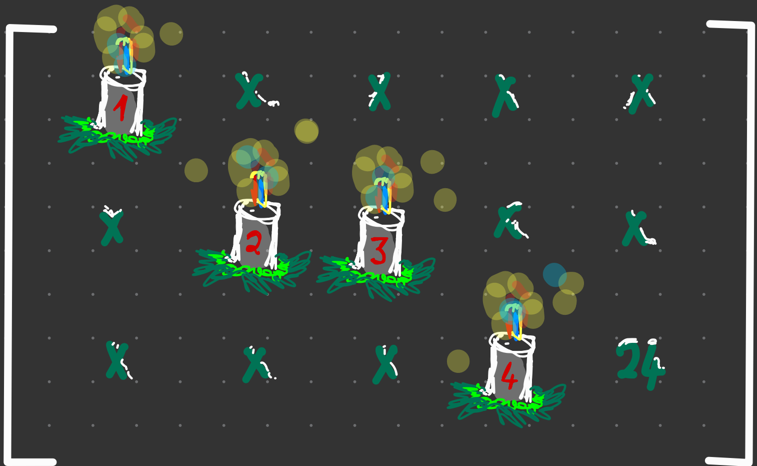
MfP I, Woche X, Seminar

15. Dez 2022



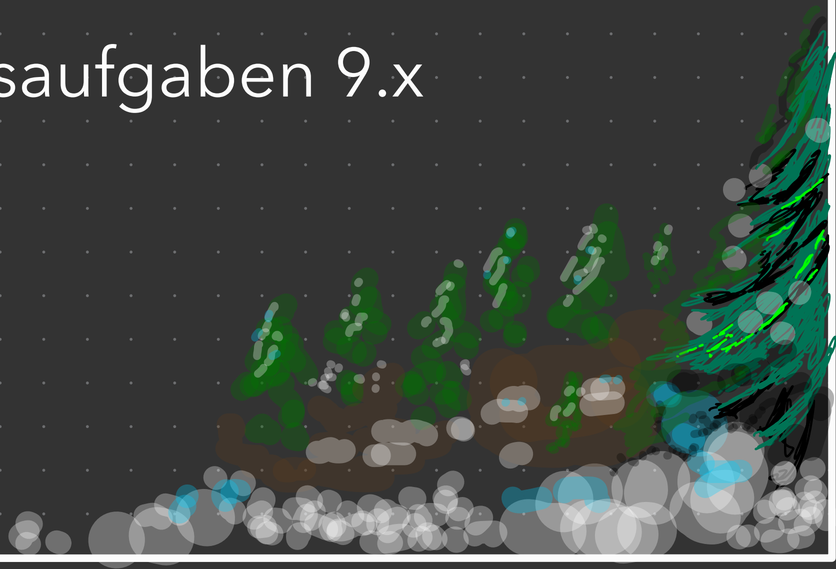
- Orga

  Dieses Notebook:
  #####

  Git Repo(s):
  https://gitea.math.uni-leipzig.de/raj_mathe

- HA 9
- Stoff (optional)
- Sem 10

Hausaufgaben 9.x



1

Z: $\forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^{n} c_i p_i = 0 \Rightarrow$ alle $c_i = 0$.

Setze $q := \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$. Da $q = 0$, gilt $q(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Fall 1 alle $c_i = 0 \Rightarrow$ gut

Fall 2 Es gibt $N \in \{1, 2, \dots, n\}$ s.d. $c_N \neq 0$.

o.E. ist N maximal bzgl.

wegen Maximalität von N sind alle $c_i = 0$ für $i > N$.

Also

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$q(x) = c_N x^N + \sum_{i=1}^{N-1} c_i x^i$$

$$= c_N \Big(\underbrace{x^N + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{c_N} x^i}_{} \Big)$$

Polynom mit Leitkoeff. 1, das N. Grades ist ($N > 0$)

$\Rightarrow \exists$ Nullstellen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \in \mathbb{C}$

$$= c_N \prod_{i=1}^{N} (x - \gamma_i)$$

Wähle ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$

ex. weil $\mathbb{R}$ unendlich viele El. hat

Dann $q(t) = \underbrace{c_N}_{\neq 0} \cdot \prod_{i=1}^{N} \underbrace{(t - \gamma_i)}_{\neq 0} \neq 0$

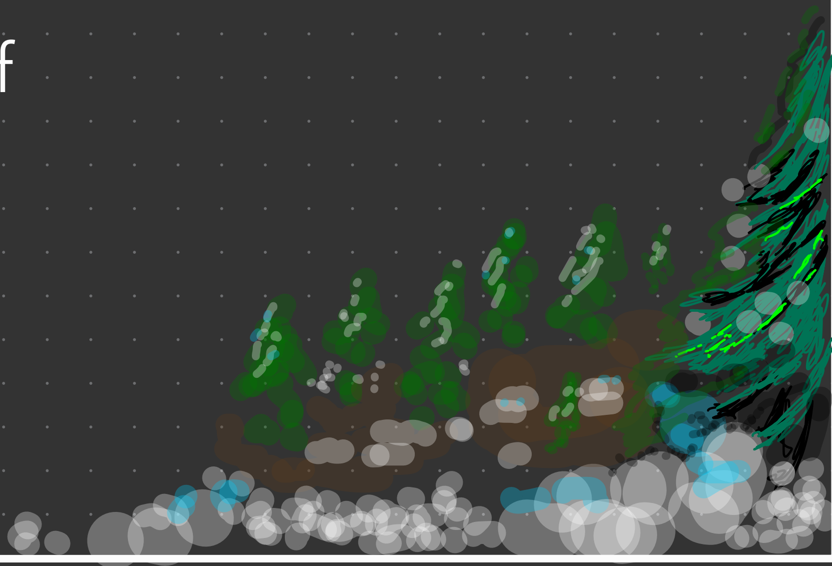
↯ WIDERSPRUCH!

$\Rightarrow$ Nur Fall 1 möglich, d.h. $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}: c_i = 0$, w.z.z.w. □

(Bitte das VL-Skript durchlesen! Folgendes Material soll nur stichpunktartig Konzepte erläutern / wiederholen.)

[redacted]

Stoff



2

- Teilmenge $M \subseteq V$ heißt

l. u. $\iff \forall N \in \mathbb{N} \; \forall (u_i)_{i=1}^N \subseteq M, \; (c_i)_{i=1}^N \subseteq \mathbb{K}: \left(\sum c_i u_i = \mathbf{0} \Rightarrow \text{alle } c_i = 0 \right)$
$\iff$ alle $x \in \operatorname{lin}(M)$ haben eindeutige Darstellung bzgl. M

Erz.sys. $\iff \operatorname{lin}(M) \supseteq V \iff$ alle $x \in V$ haben eine Darstellung bzgl. M

Basis $\iff$ l.u. + Erz.sys $\iff$ alle $x \in V$ haben eindeutige Darstellung bzgl. M

- Sätze: 1 Basisaustausch — $L, E \subseteq V$ $\quad L$ l.u., E Erzsys $\Rightarrow |L| \leq |E|$

  2 Basisergänzung — $L, E \subseteq V$ $\quad L$ l.u., E Erzsys $\Rightarrow$ ex. $L \subseteq \mathbf{B} \subseteq L \cup E$ eine Basis für V

- Dimension: $\dim V = |B|$ für $B \subseteq V$ eine Basis (wegen 1 wohldef. — wieso?)

  Es gilt $|L| \leq |B| \leq |E|$ für $L, E \subseteq V$ $\quad L$ l.u., E Erzsys.
  $\hookrightarrow$ ÜB 10!

Betrachte VR $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{K}$ — Körper, $m, n \in \mathbb{N}$

Notation

Vektor $x = n\left\{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}\right. \in \mathbb{K}^n$; $\mathbf{e}$

j-te Komponente: $(x)_j$ od. $x_j \in \mathbb{K}$

Kurzform: $x = (x_i)_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$

es ist egal, welches Zeichen man hierfür verwendet!

Matrix

$$A = m\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot}^{n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{pmatrix}\right. \in \mathbb{K}^{m \times n};$$

(i,j)-te Komponente: $(A)_{ij} \in \mathbb{K}$ typischerweise setzt man $a_{ij} := (A)_{ij}$

Kurzform: $A = (a_{ij})_{i=1;\, j=1}^{m \quad n}$

Buchstaben auch egal nur Reihenfolge wichtig!

Betrachte VR $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{K}$ — Körper, $m, n \in \mathbb{N}$

Die **Matrix**

$$A = m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{n}\right. \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

ist lediglich eine **Darstellung** einer linearen Transformation

$$T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \qquad \text{(wieso so 'rum?)}$$

definiert durch das **Matrix-Vektor-Produkt**:

$$T x = m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{n}\right. \; n\left\{\begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}\right. = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

= 2. Zeile • 1. Spalte

i-te Komponente von Ax $= (Ax)_i := \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}\, x_j$

für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

5

Für $\mathbb{K}^a$, $\mathbb{K}^b$, $\mathbb{K}^c$ und lin. Transformationen

$$\left.\begin{array}{l} T : \mathbb{K}^c \longrightarrow \mathbb{K}^b \\ S : \mathbb{K}^b \longrightarrow \mathbb{K}^a \end{array}\right\} \text{ Komposition } S \circ T : \mathbb{K}^c \longrightarrow \mathbb{K}^a \text{ auch linear}$$

mit Matrizendarstellungen

$$T \text{ entspricht } \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{\cdot\ \cdot}}^{c} \\ b\left\{\right. & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} =: B$$

$$S \text{ entspricht } \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}}^{b} \\ a\left\{\right. & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} =: A$$

$$S \circ T \text{ entspricht } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} =: C$$

gilt

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (S \circ T)x = S(Tx) = \underset{A}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

für alle Vektoren $x \in \mathbb{K}^a$.

Also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Dies motiviert die formale Definition des **Matrix-Matrix-Produkts**:

$$A \cdot B = a\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{b}\right. b\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{c}\right. = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

3. Zeile • 2. Spalte

D. h. Matrixmultiplikation entspricht der Komposition linearer Transformationen.

(i,j)-te Komponente von $A \cdot B$

$$= (A \cdot B)_{ij} := \sum_{k=1}^{b} (A)_{ik} (B)_{kj}$$

für $i \in \{1, 2, \ldots, a\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, c\}$

$$(S \circ T)x = S(Tx) = \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}}_{A} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}}_{B} \right) \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ wir definieren

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

2. Zeile • 2. Spalte

3. Zeile • 2. Spalte

(i,j)-te Komponente von $A \cdot B$

$$= (A \cdot B)_{ij} := \sum_{k=1}^{b} (A)_{ik} (B)_{kj}$$

für $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, c\}$

Betrachte VR $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{K}$ — Körper, $m, n \in \mathbb{N}$

Für

$$A = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}^{n} \right. \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

definiere man

$$A^T = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times m}$$

„dagger"
auch $A^\dagger$ od. $A^\dagger$ in der Literatur!

A^* analog, nur mit $\mathbb{C}$-konjugierten Einträgen (nur für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ relevant)

Komponenten: $(A^T)_{ji} = (A)_{ij}$ $\quad (A^*)_{ji} = \overline{(A)_{ij}}$

für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

[redacted]

Seminaraufgaben 10.x

9

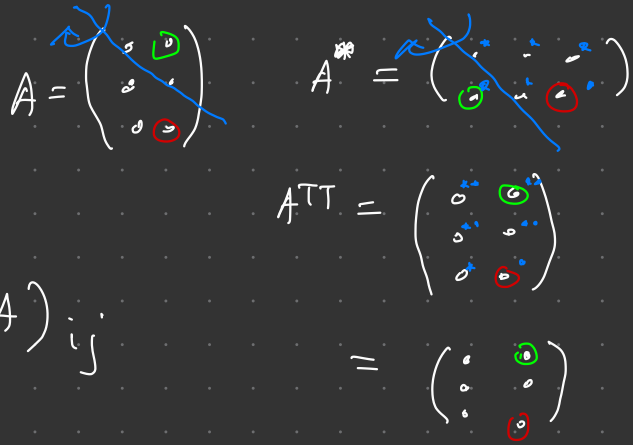
a) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{a\times b}$, $B \in \mathbb{K}^{b\times c}$. Zeigen Sie:

(i) $A^{TT} = A$ und $A^{**} = A$;

(ii) $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ und $(A \cdot B)^* = B^* A^*$.

(i) Z: $(A^{TT})_{ij} = (A)_{ij}$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, a\}$
$j \in \{1, 2, \dots, b\}$



Es gilt

$$(A^{TT})_{ij} = (A^T)_{ji} = (A)_{ij}$$

$$\Rightarrow A^{TT} = A$$

Z: $(A^{**})_{ij} = (A)_{ij}$ für alle i, j

Regel $(B^*)_{ji} = \overline{(B)_{ij}}$

Es gilt

$$(A^{**})_{ij} = \overline{(A^*)_{ji}} = \overline{\overline{(A)_{ij}}} = (A)_{ij} \quad \text{für alle } i, j$$

$$\Rightarrow A^{**} = A$$

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{a\times b}$, $B \in \mathbb{K}^{b\times c}$. Zeigen Sie:

(i) $A^{TT} = A$ und $A^{**} = A$;

(ii) $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ und $(A \cdot B)^* = B^* A^*$.

$(AB)^T \in \mathbb{K}^{c\times a}$

$B^T \in \mathbb{K}^{c\times b}$

10

ii) Z: $((AB)^T)_{ki} = (B^T A^T)_{ki}$ für $k \in \{1, 2, \dots, c\}$, $i \in \{1, 2, \dots a\}$

$$((AB)^T)_{ki} = (A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{b} (A)_{ij} (B)_{jk}$$

$(B^*)_{ij}$ $\quad (AB)_{ij}$

$(\cancel{} A \cdot B \cancel{})_{ij}$

$$(B^T \cdot A^T)_{ki} = \sum_{j=1}^{b} (B^T)_{kj} (A^T)_{ji} = \sum_{j=1}^{b} (B)_{jk} (A)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (A)_{ij} (B)_{jk} = ((AB)^T)_{ki}$$

Seminaraufgabe 10.2 (Basen und Dimension)
Sei V ein endlich dimensionaler VR über $\mathbb{K}$. Erklären Sie mittels des Basisergänzungssatzes und der Wohldefiniertheit der Dimension von V folgende Aussage: Sei $B \subseteq V$ eine l. u. Teilmenge. Dann $|B| \leq \dim(V)$ mit Gleichheit gdw. B bereits eine Basis ist.

Zur Erinnerung: *Der Basisergänzungssatz besagt: Seien $B \subseteq V$ eine l. u. Teilmenge und $E \subseteq V$ ein endliches Erzeugendensystem für V. Dann existiert eine Teilmenge $B \subseteq B' \subseteq B \cup E$, so dass B' eine Basis für V ist.*

$\leq$: Sei E eine Basis für V (ex. immer). $|E| = \dim(V) < \infty$.

$\Rightarrow$ $B \subseteq V$ l. u., $E \subseteq V$ (endl.) Erz. sys.

$\Rightarrow$ ex. $B \subseteq B' \subseteq B \cup E$, s. d. B' eine Basis ist.

$\Rightarrow$ $|B| \leq |B'| \overset{*}{=} \dim(V)$.

$|B| = \dim(V) \Rightarrow B$ Basis: (mit der letzten Konstruktion)

$\Rightarrow |B| = \dim(V) = |B'|$.

$\Rightarrow$ da $B \subseteq B'$ und B, B' endl. und $|B| = |B'|$ folgt $B = B' =$ eine Basis.

B Basis $\Rightarrow |B| = \dim(V)$: weil $\dim V$ wohldefiniert.

14

(Zusatz) Seminaraufgabe 10.4 (Anwendung aus der Signalverarbeitung)
Zwecks Unterscheidbarkeit wird $\imath$ für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ gebraucht und i nur für Indizes. Außerdem laufen hier alle Indizes von 0 bis $n-1$ statt von 1 bis n. In dieser Aufgabe deuten wir Vektoren $u \in \mathbb{C}^n$ als *Signale* über der diskreten »Zeitachse« $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, wobei die i-te Komponente von u den Wert des Signals zum »Zeitpunkt« i beschreibt. Z. B. ist $-\frac{7}{10}\mathbf{e}_8 + \imath\sqrt{2}\mathbf{e}_{58} \in \mathbb{C}^{100}$ das Signal über 100 Zeitpunkten, das immer »aus« ist, außer zu den Zeitpunkten 8 und 58, wo das Signal die Werte $-\frac{7}{10}$ bzw. $\imath\sqrt{2}$ annimmt. Uns interessieren nun Signale, die auf eine einfache Weise oszillieren. Hierfür definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ den Vektor $u_{n,k} \in \mathbb{C}^n$ (der ein sog. *harmonisches Signal* beschreibt) sowie die Matrix $\mathcal{F}_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (genannt: *Fourier-Transformation*) durch:

$$u_{n,k} := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\imath \frac{2\pi kj}{n}\right) \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_n := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\imath \frac{2\pi ij}{n}\right)\right)_{i,j=0}^{n-1}.$$

Z. B. $u_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass sich jedes Signal eindeutig als lineare Kombination aus *harmonischen Signalen* darstellen lässt.

siehe git Repo → notebooks/woche-10.ipynb
(vorher „just build" in bash ausführen)


Frøhe $W\sqrt{e^{2}h_{n}8^{n}}$!