MfP I, Woche **12**, Seminar

12. Januar 2023

0

- [x] Orga
- [x] Lsg HA 11
- [x] multilineare Formen
  - definiert auf Vektoren
  - " " Matrizen
- [x] Sem 12

[redacted]

Hausaufgaben 11.x

Hausaufgabe 11.4

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Hinweis: Sie können die beiden Fälle gemeinsam behandeln und müssen diese nicht getrennt aufschreiben.*

a) Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{K})$, versehen mit der Matrixmultiplikation, eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{K})$ für $n \geq 2$, keine kommutative Gruppe ist, aber $AA^{-1} = A^{-1}A$ für alle $A \in GL(n, \mathbb{K})$ gilt.

Gruppenaxiome

0) Teilmeng unter $\cdot$ stabil.

1) assoz.

2) Neutr. d.h. ex. e s.d. $eA = A$

3) Inv. für alle A ex. A' s.d. $A'A = e$.

0) Seien $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$. z.z. AB $n \times n$ Matrix invertierbar.

- A $n \times n$, B $n \times n$ $\Rightarrow$ AB $n \times n$ Matrix
- Sei $C := B^{-1}A^{-1}$ (ex. weil A, B inv. sind)

Dann $C \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} I B$

$= B^{-1}B = I$

und analog

$AB \cdot C = A(BB^{-1})A^{-1} = \ldots = I$

Neutrales El.

- $I \cdot A = A = A \cdot I$ für alle $n \times n$ Matrizen, also auch für $A \in GL(n, \mathbb{K})$
- I ist invertierbar, da $I \cdot I = I$
  $\Rightarrow I \in GL(n, \mathbb{K})$

$\Rightarrow$ Neutralel. ex und ist gleich I

Inverses

Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$ bel.

Per Def$^{\underline{n}}$ ex. $n \times n$-Matrix B s.d.

$$BA = I = AB \quad *$$

$\Rightarrow$ B ist wegen $*$ invertierbar

$\Rightarrow$ $B \in GL(n, \mathbb{K})$ und invertiert A

Assoz.

2) Seien $A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$.

Z: $(AB)C = A(BC)$

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} C_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} C_{kl}$$

$A_{ij} B^{j}{}_{k} C^{k}{}_{l}$

$$(A(BC))_{il} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (BC)_{jl}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sum_{k=1}^{n} B_{jk} C_{kl}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ij} B_{jk} C_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \ldots$$

2×2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2n \times 2n$

$$A \longrightarrow \left\{ I + \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; D \;\; n \times n \text{ Matrix} \right\}$$

$$\Big\downarrow \cdot^T$$

$$A^T \longrightarrow I + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline D^T & 0 \end{array}\right)$$

$$AA^T = I + \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline D^T & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} DD^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^TA = \text{"} \qquad \text{"} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D^TD \end{array}\right)$$

(Bitte das VL-Skript durchlesen!
Folgendes Material soll nur stichpunktartig
Konzepte erläutern / wiederholen.)

[redacted] Stoff

(auf Tafel)

[redacted]

Seminaraufgaben 12.x

(auf Tafel)