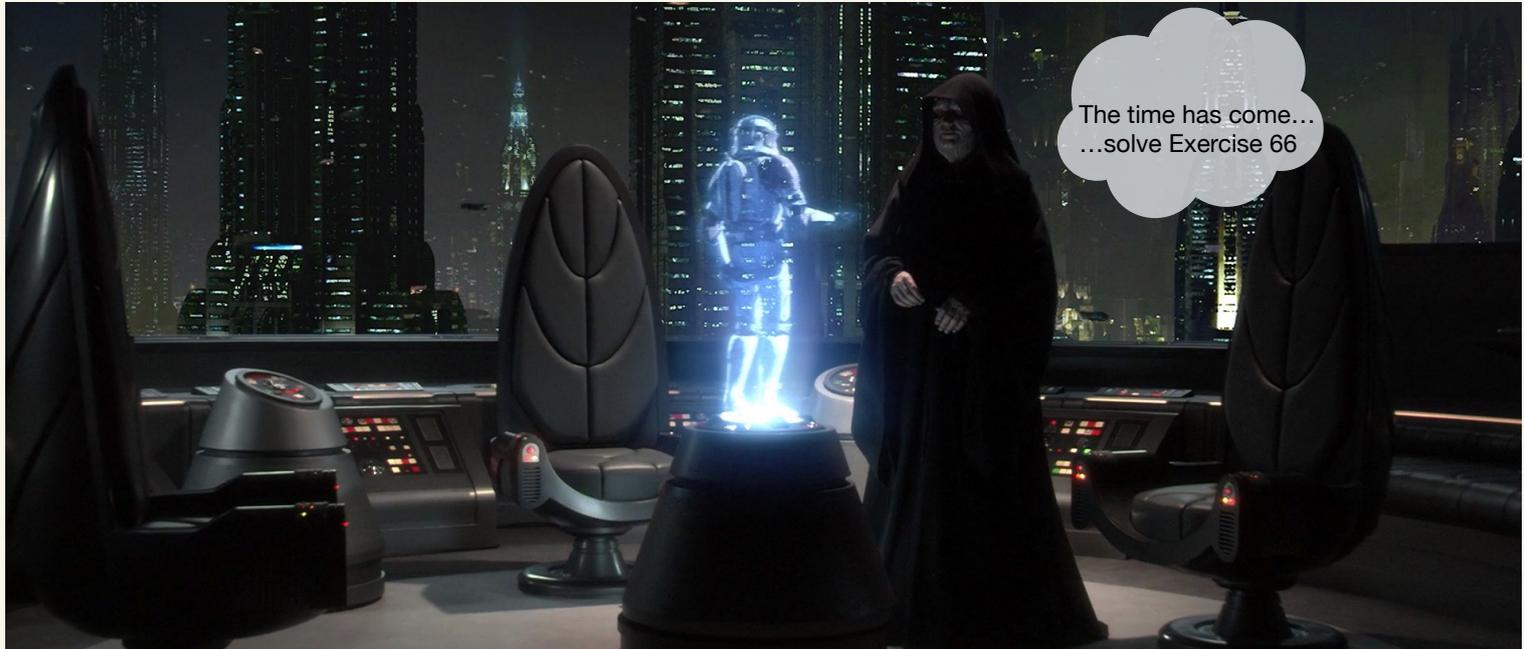


MfPI, Woche 6, Seminar

17. November 2022

0



a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Untersuchen Sie $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Wiederholen Sie (a) für $a \in (1, \infty)$.

a) C-K: $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: |g_m - g_n| < \varepsilon$
 \Rightarrow ~~x~~ od. $>$ ✓ od. \leq ✓

Nebenrechnung: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ o. E. mit $m \leq n$. Dann

$|g_n - g_m| \leq |a|^m \cdot \frac{1}{1-|a|}$ $g_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

→ Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Da $(|a|^n) \rightarrow 0$ (da $|a| < 1$),

ex. N s. d. $|a|^n < (1-|a|)\varepsilon$ für $n \geq N$.

⇒ für $m, n \geq N$:

$$|g_m - g_n| \leq |a|^{\min\{m,n\}} \cdot \frac{1}{1-|a|} < (1-|a|)\varepsilon \cdot \frac{1}{1-|a|} = \varepsilon$$

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Untersuchen Sie $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Wiederholen Sie (a) für $a \in (1, \infty)$.

b) C-K: $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: |g_m - g_n| < \varepsilon$

best. div. $_{+\infty}$: $\forall K > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: g_n \geq K$.

\Leftrightarrow gilt $g_n \geq a^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $K > 0$. Da $(a^n)_n \rightarrow +\infty$ (da $a > 1$),

ex. $N \in \mathbb{N}$ s. d. $a^n \geq \frac{1 + (a-1)K}{a-1}$ für $n \geq N$

Für $n \geq N$ gilt also $g_n = \frac{a^n - 1}{a - 1} \geq K$

Also divergiert $(g_n)_n$ best. gegen $+\infty$.

c) Seien $d_1, d_2, d_3, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ als »Ziffern« betrachtet. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die reelle Zahl mit Dezimaldarstellung

$$r_n := 0, \overline{d_1 d_2 \dots d_n}$$

Z. B. falls $d_1 = 0; d_2 = 1; d_3 = 1; d_4 = 8; \dots$, dann gelten

$$r_1 = 0,000000000000 \dots$$

$$r_2 = 0,010101010101 \dots$$

$$r_3 = 0,011011011011 \dots$$

$$r_4 = 0,011801180118 \dots$$

⋮

Untersuchen Sie $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) C-K: $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: |r_m - r_n| < \varepsilon$

Nebenrechnung: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ o. E. mit $m \leq n$. Dann $\alpha \in \mathbb{N}, s, s' \in [0, 1]$

$$10^m r_m = \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{\alpha :=} \cdot \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{=: s}$$

$$10^m r_n = \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{\alpha :=} \cdot \underbrace{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_n}_{=: s'} \cdot \overline{d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} \dots d_n}$$

$$\Rightarrow 10^m (r_m - r_n) = (\alpha + s) - (\alpha + s') = s - s' \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow |r_m - r_n| \leq 10^{-m}$$

Seminaraufgabe 6.2

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge und $s \in (0, \infty)$. Angenommen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfülle das C-K. Beweisen Sie, dass $(x_{\lceil sn \rceil})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls das C-K erfüllt.

$$C-K: \quad \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: |x_{\lceil sm \rceil} - x_{\lceil sn \rceil}| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Z: für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{\lceil sm \rceil} - x_{\lceil sn \rceil}| < \varepsilon$ für $m, n \geq N$

Konstruktion • per Annahme ex. $N_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

• nach Archimedes-Prinzip ex. $N_1 \in \mathbb{N}$ s.d.

(z. B. $N_1 := \frac{1}{\varepsilon}$)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N_1$ gelten

$$\begin{aligned} \lceil sm \rceil &\geq sm \geq && \geq \\ \lceil sn \rceil &\geq sn \geq && \geq \end{aligned}$$

also wegen $\lceil sm \rceil \geq sm \geq sn \geq \lceil sn \rceil$ gilt

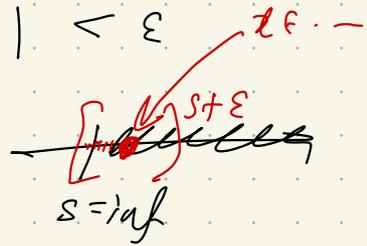
$$|x_{\lceil sm \rceil} - x_{\lceil sn \rceil}| < \varepsilon$$

Seminaraufgabe 6.3

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Beweisen Sie ausführlich, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das C-K erfüllt. Was ist der Grenzwert?

C-K: $\forall \epsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: |x_m - x_n| < \epsilon$

$s := \inf x_n$ (ex. per Annahme)



Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

$\exists: \text{ex. } N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall m, n \geq N_\epsilon: |x_m - x_n| < \epsilon.$

per Defⁿ von Inf. ex. $n^* \in \mathbb{N}$ s.d. $s \leq x_{n^*} < s + \epsilon$

$\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap [s, s+\epsilon) \neq \emptyset$

Setze $N_\epsilon := n^*$

Dann für $m, n \geq N_\epsilon$ gilt wegen Monotonie

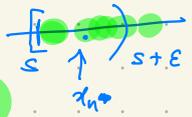
$(s \leq) x_m, x_n \leq x_{N_\epsilon} = x_{n^*} < s + \epsilon$

$\Rightarrow x_m, x_n \in [s, s + \epsilon)$

$\Rightarrow |x_m - x_n| < |(s + \epsilon) - s| = \epsilon$

$\exists \forall \epsilon > 0: N \in \mathbb{N} \forall A: N \geq N \epsilon: 0 < \exists A$

$\exists \forall \epsilon > 0: N \in \mathbb{N} \forall A: N \geq N \epsilon$



Seminaraufgabe 6.4

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie mithilfe des C-K, dass die Folge $(x_n := \sup\{u_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Was ist der Grenzwert?

• Sei $M \in [0, \infty)$ so, dass $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [-M, M]$

\Rightarrow für $n \in \mathbb{N}$ $A_n := \{u_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset, \subseteq [-M, M]$

$\Rightarrow (x_n =) \sup A_n$ ex. und $\in [-M, M]$

$\Rightarrow (x_n)_n$ (nach unten) beschr. *

• Für $m \in n$ in \mathbb{N} gilt $A_n \subseteq A_m,$

also $(x_n =) \sup A_n \leq \sup A_m (= x_m)$ (siehe ÜB 2)

$\Rightarrow (x_n)_n$ monoton fallend *

aus * + * folgt (siehe Sem 6.3)

$$\begin{aligned} (x_n)_n &\rightarrow \inf_n x_n \\ &= \inf_n \sup_{k \geq n} u_k \\ & (= \limsup_n u_n) \end{aligned}$$

Hausaufgabe 5.1

- a) Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?
- b) Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).
- c) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

a) Sei $\varepsilon > 0$.

Für $n \geq N$ gilt

$$|\alpha_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0 \quad \dots \quad N < n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0 \quad \dots \quad N < n \in \mathbb{N} \quad \dots \quad 0 < \varepsilon$

$$\Rightarrow (\alpha_n)_n \xrightarrow{n} c$$

Hausaufgabe 5.1

- ✓ a) Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?
- b) Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).
- c) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

b) Nebenrechnung

$$a_n = \frac{2(\cancel{n^2-5} + 5) + 5n}{n^2-5}$$

$$= 2 + \frac{5n+10}{n^2-5}$$

$$= 2 + \frac{n}{n^2} \cdot \frac{5 + \frac{10}{n}}{1 - \frac{5}{n^2}}$$

$$= 2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{5 + \frac{10}{n}}{1 - \frac{5}{n^2}}$$

$$\xrightarrow{n} 2 + 0 \cdot \frac{5+0}{1-0} = 2$$

\downarrow
 $\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow 0$

\Rightarrow Folge konvergent mit $\lim_n a_n = 2$

Hausaufgabe 5.1

- ✓ a) Sei $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Konvergiert die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?
- ✓ b) Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \frac{2n^2+5n}{n^2-5}$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (inklusive Beweis!).
- c) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n+1}n$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^n n$. Konvergieren die Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

c) 1) $|y_n|, |z_n| = n \xrightarrow{n} \infty \Rightarrow$ Folgen **divergieren**. (aber nicht bestimmt, da Vorzeichen alternieren.)

$\forall k > 0$: sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq k$ z.B. $N = \lceil k \rceil$
 dann $\forall n \geq N$: $|y_n| = n \geq N \geq k$

d.h.

$\forall k > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $|y_n| \geq k$.

$\forall k > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $y_n \geq k$ X

2) $y_n + z_n = -(-1)^n n + (-1)^n n = 0 \xrightarrow{n} 0$

$\Rightarrow (y_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konv.** mit $\lim_n (y_n + z_n) = 0$

Hausaufgabe 5.2

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \sqrt{n^2 + 2n} - n$.

- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.
- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.
- Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.
- Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den Grenzwert. Für festes $\varepsilon > 0$ wählen Sie nun $n \in \mathbb{N}$, so groß, dass $|x - x_n| \leq \varepsilon$.

(Ohne Nebenrechnung) für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
 x_m - x_n &= \sqrt{m^2 + 2m} - \sqrt{n^2 + 2n} - (m - n) \\
 &= \frac{(m^2 + 2m) - (n^2 + 2n)}{\sqrt{m^2 + 2m} + \sqrt{n^2 + 2n}} - (m - n) \\
 &= (m - n) \left(\frac{(m+n) + 2}{\sqrt{m^2 + 2m} + \sqrt{n^2 + 2n}} - 1 \right) \\
 &= \text{🌀😱}
 \end{aligned}$$

Hausaufgabe 5.2

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \sqrt{n^2 + 2n} - n$.
$$= \frac{a-b}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

9

- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.
- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.
- Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.
- Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den Grenzwert. Für festes $\varepsilon > 0$ wählen Sie nun $n \in \mathbb{N}$, so groß, dass $|x - x_n| \leq \varepsilon$.

Nebenrechnung für $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{2n}{\cancel{n} \cdot (\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1)}$

$\mathbb{N} \ni n \mapsto n$ mon. steigend,
 $\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \mapsto 1 + \frac{2}{n}$ mon. fallend, $\in [1+0, 1+\frac{2}{1}] = [1, 3]$
 $\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \mapsto \sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1$ mon. fallend, $\in [\sqrt{1+1}, \sqrt{3+1}] = [2, 1+\sqrt{3}]$
 $\Rightarrow \mathbb{N} \ni n \mapsto \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} = x_n$ mon. steigend, $\in [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, \frac{2}{2}] = [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, 1]$

a) + b) erledigt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mon. steigend, $\subseteq [\frac{2}{1+\sqrt{3}}, 1]$, also beschr.

c) + d) mon. steigend + (nach oben beschr.) \Rightarrow konv. gegen Supremum. = 1

Alternativ: $n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} \xrightarrow[n]{\text{RR}} \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = 1$

Also konv. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 1$

Hausaufgabe 5.3

Zeigen Sie mithilfe geeigneter Kriterien, dass die folgenden Folgen konvergieren und berechnen Sie den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vermöge $a_n := \frac{n+2}{n^2+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vermöge $b_n := \frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^4+5n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{--- NR} \\ \frac{2}{n} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{RR}_+ \\ \Rightarrow \end{array} \quad 1 + \frac{2}{n} \rightarrow 1 + 0 = 1$$

$$\text{und } 1 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1 + 0 = 1 \neq 0$$

$$\begin{array}{l} \text{RR}_{\text{Dv}} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{RR} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

also $a_n \xrightarrow[n]{} 0$

also $\lim_n a_n$ ex. und $\lim_n a_n = 0$

~~$\lim_n a_n \rightarrow \text{ex}$~~

Hausaufgabe 5.3

Zeigen Sie mithilfe geeigneter Kriterien, dass die folgenden Folgen konvergieren und berechnen Sie den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vermöge $a_n := \frac{n+2}{n^2+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vermöge $b_n := \frac{2n^3 + (-1)^n n^2}{n^4 + 5n + 1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}} \\
 &\xrightarrow{n} 0 \cdot 2 = 2
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{2+0} \frac{2+0}{1+0+0} = 2$

\Rightarrow Folge konv. mit $\lim_n b_n = 2$